

**Институт проблем развития науки
Российской академии наук**

СБОРНИК СТАТЕЙ



Москва 2009

Сборник статей. – М. : Ин-т проблем развития науки РАН, 2009. – 88 с. — ISBN 978-5-91294-024-8

Данный сборник посвящен различным экономическим аспектам развития научного потенциала , а также отдельным вопросам математического моделирования сложных систем. Он включает работы как сотрудников ИПРАН РАН, так и специалистов, с которыми институт ведет совместные исследования.

Издание предназначено для научных работников, студентов, аспирантов.

ISBN 978-5-91294-024-8

Содержание

Влияние кадрового потенциала российской науки на состояние экономического пространства страны

В. Е. Чистякова

4

Постановка проблемы эффективного функционирования научно-инновационной системы

Л. П. Клеева

16

Твердое тело в скалярном поле

М. А. Хмиадашвили, К. М. Схвитаридзе,
М. Г. Харашвили

25

Движение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве с шаровой полостью

К. М. Схвитаридзе, М. А. Хмиадашвили,
М. Г. Харашвили

37

Повышение конкурентоспособности отечественного аэрокосмического комплекса за счет совершенствования проведения аэродинамического эксперимента

Л. П. Клеева, И. В. Клеев

56

Анализ цикличности научного потенциала России в 1995–2007 годах

О. А. Кошкарева

73

Влияние кадрового потенциала российской науки на состояние экономического пространства страны

В. Е. Чистякова

Формулировка цели. Наука и образование на современном этапе являются главными факторами социального прогресса, они влияют на экономику и развитие общества не только непосредственно (через открытие новых знаний, внедрение новых прикладных идей и разработок), но и опосредованно, через формирование нового типа общественных отношений, способствующих раскрытию социально-духовного, научно-образовательного потенциалов общества, созданию условий для коммерциализации интеллектуального потенциала, повышению роли умственного труда и творческой деятельности, изменению образа жизни. Главным источником, генератором и двигательной силой решения этих задач является кадровый потенциал науки, оказывающий влияние на экономику страны, состояние и трансформацию ее экономического пространства. Под экономическим пространством в отечественной литературе понимается реально существующая комбинация условий жизнедеятельности населения на определенной территории, включающая: масштабы территории; ее пригодность и привлекательность для проживания и хозяйственного освоения; урбанизированность и плотность заселенности; наличие производственной, социально-бытовой и институциональной инфраструктур; уровень развития промышленности и других секторов экономики на данной территории. На состояние экономического пространства в наше время большое влияние может оказывать уровень развития научно-исследовательского и инновационного потенциала, развитие и размещение образовательных, научно-внедренческих центров, наукоградов, технополисов и других организационно-предпринимательских структур, связанных с нововведениями и инновациями. Однако этот аспект структуризации экономического пространства пока еще недостаточно исследован экономической наукой, что затрудняет выработку и реализацию эффективных управленческих решений в разных сферах и секторах производственной и общественной деятельности. В свете этого одной из основных целей данной статьи является рассмотрение влияния кадровой состав-

ляющей научно-инновационного потенциала страны на состояние и структуру ее экономического пространства.

Актуальность и необходимость рассмотрения этой цели определяется также тем, что одним из важнейших условий социально-экономического развития любой страны является рациональная организация научно-образовательного и инвестиционного сегментов экономического пространства, его включение в процесс экономического роста и приведение его состояния в соответствие с требованиями социального прогресса. Создание этого условия предполагает в первую очередь обеспечение сбалансированности между органически взаимосвязанными сферами общественной жизни, а именно – образованием и наукой, с одной стороны, а с другой – между уровнями развития этих сфер и внедрением достижений и результатов научных исследований в практическую деятельность. Как показывает анализ, в настоящее время в нашей стране каждая из указанных сфер общественной деятельности развивается сама по себе, оторвано друг от друга. Об этом, в частности свидетельствуют показатели, формирующие индекс развития человеческого потенциала страны, опубликованные мировым банком. Так, по данным ООН в настоящее время, по индексу образованности населения наша страна находится на 28-м месте; по индексу доходов – на 64-м; по индексу средней продолжительности предстоящей жизни населения – на 119-м среди 185 государств мирового сообщества. По этой причине, несмотря на сравнительно высокий уровень образованности населения, состояние развития научно-исследовательской и внедренческой сфер деятельности не соответствует требованиям времени, а эффективность функционирования экономики страны в целом находится на относительно низком уровне по сравнению с другими странами по производительности общественного труда, выпуску конечной продукции на душу населения, конкурентоспособности и др. В индустриально развитых странах ЕС и США положение в развитии рассматриваемых сфер деятельности кардинально другое¹. Эти страны уделяют первостепенное внимание обеспечению взаимосбалансированных условий в развитии образования, научно-исследовательской и внедренческой сфер деятельности, координируя приоритеты между достигнутыми уровнями их развития с учетом обеспечиваемого ими вклада в темпы экономического роста и повышение уровня благосостояния. Приоритетный и сбалансированный подход широко используется рядом стран ЕС в сфере организации и управления научными исследованиями, повышения квали-

¹ Так, например, производительность труда в автомобильной промышленности России, по нашей оценке, на порядок ниже по сравнению с ведущими автомобильными странами мира, а в банковской системе производительность труда по данным компании Мак-Кейнзи меньше примерно в 10 раз.

фикации кадров и внедрения инноваций. При этом в качестве одного из важнейших принципов реализации этого подхода признается положение о том, что более эффективным механизмом активизации инновационной политики, является не столько высокий уровень финансирования исследований и разработок, хотя этому фактору придается соответствующее значение, сколько консолидация целей и интересов участников образовательного и научно-внедренческого цикла. Это в практической управленческой деятельности обеспечивается на основе широко используемых механизмов кооперации межведомственных инициатив в определении инновационной политики, выявлении и согласовании общих целей, определении условий их достижения и распределении ответственности и стимулов в зависимости от фактических результатов.

Экономической теорией научно обоснованно положение о том, что усвоением ускорения и сбалансированного развития этих процессов является образование и научная деятельность.

Теоретический аспект проблемы. В последние два десятилетия учесть влияние образования на рост ВВП пытались Р. Лукас, Г. Мэнкью, Д. Ромер, Д. Уэйл и другие зарубежные и отечественные авторы. Разработанные ими модели основывались на использовании различных модификаций производственных функций, формализуемых к физическому и человеческому аспектам капитала при разных условиях его накопления. Главным результатом экономической отдачи образования теоретики экономической науки считают прирост дохода (заработной платы) работника благодаря повышению его образовательного и профессионального уровня. Это основывается на том, что различия в заработной плате отражают различия в производительности труда. «Денежный доход от образования» выявляется как разность в пожизненных заработках тех, кто имеет неодинаковое образование (скажем, выпускник вуза и среднего учебного заведения). В издержки образования помимо непосредственных расходов на обучение включают и так называемый упущенный доход. Это тот потенциальный заработок, который человек мог бы получить, если бы работал, а не учился. На долю недополученного дохода, по оценкам экспертов, приходится обычно больше, чем на долю прямых издержек на образование.

Прямая зависимость размеров заработной платы и социальной защищенности работников от уровня их образования и квалификации позволяет лицам с более высоким образовательным потенциалом возмещать расходы на обучение и обеспечивать более высокие доходы. Так, в США ежегодный доход высококвалифицированного специалиста составляет примерно 75,0 тыс. долл., доктора наук – 55,0 тыс., магистра – 50,0 тыс., бакалавра – 24,4 тыс. Человек с незаконченным высшим

образованием может рассчитывать в среднем на ежегодный заработок в 19,7 тыс. долл., окончивший среднюю школу – на 18,7 тыс., а не закончивший ее – только на 12,8 тыс. долл.².

Вместе с тем многие исследователи усматривают эффект образования не только в абсолютных размерах дохода, но и в быстром приросте человеческого капитала и валового внутреннего продукта в результате инвестиций в образование. Одним из первых размеры человеческого капитала в США рассчитал в начале 60-х годов XX в. Т. Шульц, умножая стоимость одного года обучения каждого уровня (с учетом упущенных заработков) на число человеко-лет образования, накопленных населением к тому или иному времени. По его расчетам, образовательный капитал, воплощенный во всем населении, составлял 1307 млрд. долл.; образовательный капитал, воплощенный в рабочей силе, – 873 млрд., а воспроизводимое материальное богатство – 1617 млрд. долл. Таким образом, доля образовательного капитала в данном случае составила примерно 80% ко всему материальному богатству, а удельный вес этого капитала, воплощенного в рабочей силе по отношению ко всему населению, оценен на уровне 67%. С 1929 по 1969 гг. темп роста фонда образования опережал темп роста физического капитала примерно в 2 раза и соответственно составил 4,1 и 2%³.

В результате этих исследований в настоящее время получены оценки, характеризующие вклад образования в прирост ВВП по ряду стран. Однако, в отечественной практике выработки управленческих решений в настоящее время пока еще влияние человеческого капитала на развитие экономики, ее региональных и отраслевых подсистем и уровень благосостояния граждан в полной мере недоучитывается. Не разработаны также методы и условия включения научно-образовательного пространства России в процессы экономического роста и социально-экономического развития страны и регионов, обеспечения их взаимосбалансированности.

Реализация неисчерпаемых способностей человека требует создания соответствующих условий для их эффективного использования с учетом потребностей общества, целей социально-экономического развития, ускорения социального прогресса на основе внедрения инноваций и новых технологий. По данным исследований, проведенных в ряде стран о взаимосвязи между развитием экономики и образования, было установлено, что на долю последнего в настоящее время приходится от 15 до 20% прироста национального дохода. Четвертая часть этого прироста обеспечивается высшим образованием, от 20 до 40% дают высшие учебные заведения и академические институты, осу-

² Щетинин В.П., Хроменков Н.А., Рябушкин В.С. Экономика образования. Учебное пособие. М., 1998. С.286.

³ Дятлов С.А. Основы теории человеческого капитала. С.-Петербург. 1994.

шествующие фундаментальные и прикладные исследования. Страны ОЭСР тратят на образование свыше 5% ВВП. В России по данным Росстата этот показатель в настоящее время составляет менее 3,5%.

Тенденции влияния науки на экономику и общество. В последние два десятилетия во многих зарубежных странах (США, Японии, ЕС) решающая роль науки и образования в экономическом и социальном развитии, в укреплении их положения на мировых рынках и в мировом экономическом сообществе была признана в качестве главного приоритета обеспечения конкурентоспособности и национальной безопасности. Однако, источником развития научно-образовательная сфера деятельности становится лишь тогда, когда созданы достаточные условия для практической реализации ее результатов. В качестве необходимых и достаточных мер следует учитывать: престижность образования и научной деятельности; сбалансированность между потребностями экономики в высококвалифицированных кадрах и их подготовкой в ВУЗах по определенным специальностям; создание необходимого резерва кадров с высшим образованием для пополнения научно-исследовательской сферы, реального сектора, государственного управления и сектора общественной деятельности; совершенствование действующих и создание новых стимулирующих механизмов, способствующих их развитию. «Развитие при таком подходе понимается как накопление человеческого капитала в его наиболее эффективной форме»⁴. Важное значение при этом имеет социальный аспект рассматриваемой проблемы, который обусловлен тем обстоятельством, что значительная часть образовательных услуг в настоящее время предоставляемая государством, относится к общественным благам. Возникает естественное стремление у ряда слоев населения получить эти блага в максимальном количестве, независимо от роста их отдачи. Получение образования, таким образом, является тем общественным благом, которое увеличивает разрыв между частными выгодами и частными издержками. Так как этот разрыв растет с каждым годом обучения, то формируется тенденция к росту продолжительности обучения, независимо от отдачи, которое это обучение могло бы принести. Траектория этой тенденции для стран третьего мира, часть из которых по масштабам своих социально-экономических потенциалов, условиям и особенностям развития, идентична отдельным российским регионам, исследована в ряде работ.

В бывшем СССР и странах Восточной Европы затраты на научные исследования и образование определялись нормативным методом, исходя из численности занятых в научной сфере, численности студентов, количества вузов и планируемых коэффициентов выпуска специалистов по годам обучения. С учетом этого вычислялись показатели затрат.

⁴ Там же.

При этом эффективность осуществления этих затрат, как правило, не определялась. Отсутствовали исследования, позволяющие выявить влияние уровня развития научно-исследовательской сферы, образованности занятых в отраслях материального производства и непродовольственной сферы на повышение производительности труда, конкурентоспособность производства, уровень обслуживания населения. В настоящее время этот подход сохранился. Негативные последствия его использования в научной сфере, системе высшего образования и в управлении экономикой в настоящее время проявляются в том, что:

- количество трудовых ресурсов с высшим образованием в нашей стране превышает аналогичные показатели по сравнению с другими странами, а уровень производительности общественного труда значительно отстает;

- среди трудоспособного населения страны с высшим образованием отмечается сравнительно высокий по сравнению с другими странами уровень безработных;

- в стране сформировался сравнительно емкий рынок образовательных услуг, а профессионально-квалификационный сегмент рынка трудовых ресурсов не соответствует требованиям инновационного развития страны;

- проявляется устойчивая тенденция нарастания диспропорции между приростом высококвалифицированных кадров и численностью занятых в научно-исследовательской сфере;

- в экономике страны в целом и в отдельных ее секторах темпы роста оплаты труда значительно опережают темпы прироста производительности;

- динамика роста инновационно активных предприятий на протяжении последних десятилетий не сопоставима с приростом численности занятых, имеющих высшее профессиональное образование;

- уровень технической вооруженности и фондовооруженности труда в сферах образования и научных исследований значительно отстает от аналогичных показателей в промышленности и в других секторах национальной экономики, а техническое и моральное состояние основных производственных фондов по существу во всех отраслях общественного производства находится на таком уровне, которое не соответствует современным требованиям научно-технического прогресса и профессиональной подготовленности кадров.

Существуют и другие диспропорции в научно-образовательном пространстве страны, негативные последствия влияния которых на протяжении последних десятилетий на экономический рост и социально-экономическое развитие страны, все более усиливаются и превращаются в непреодолимый барьер социального прогресса.

Показатели результатов научно-образовательной деятельности. Для преодоления указанных и других диспропорций при выработке управленческих решений и обосновании эффективных направлений развития научно-исследовательской и инновационно-внедренческой сфер экономики и ее реального сектора необходимо учитывать во первых, особенности пространственной организации национального хозяйства, а во-вторых, уточнить принципы и состав показателей, на основе анализа и прогнозирования которых должны приниматься управленческие решения.

Основные особенности пространственной организации отечественной экономики: большие размеры территории; местоположение, тяготеющее к верхнеширотной (приполярной) зоне евроазиатского материка и связанные с ним относительно суровые климатические условия жизнедеятельности; низкая плотность населения и неравномерность размещения его на территории; слабая транспортная освоенность территории; асимметричность размещения факторов производства. Это основные природно-климатические и географические факторы неоднородности хозяйственного пространства страны. Другую группу составляют социально-экономические факторы неоднородности. Они характеризуются неоднородным распределением общественного труда в разных регионах страны и отсутствием учета затрат этого труда по видам: ручного, индустриального, информационного; разным уровнем развития технологий⁵. Техническая отсталость производственной сферы сочетается у нас с заметной «продвинутой» в области разработки новейших технологий. Однако, в последнее десятилетие, на протяжении которого наша страна имела все необходимые предпосылки для наращивания и приумножения этой «продвинутой», органы управления не воспользовались имеющимися возможностями для переориентации экономики с сырьевой на инновационную траекторию социально-экономического развития. В процессе выработки и реализации управленческих решений повсеместно проявлялся так называемый бессубъектный подход к экономической деятельности на макро-, мезо- и микроуровнях.

Анализируя состав отмеченных недостатков, характерных для нынешнего состояния научно-исследовательской и инвестиционно-внедренческой сфер отечественной экономики и ее реального сектора, можно предложить следующую систему показателей, разработанную учеными Института проблем развития науки РАН, на основе мониторинга и анализа которой следует принимать управленческие решения

⁵ В широком смысле технология – способ освоения человеком материального мира посредством социально-организуемой деятельности, включающей три компонента: научные принципы, орудия труда, люди, владеющие профессиональными навыками.

по повышению профессионально-квалификационной и мотивационной составляющих использования уже имеющегося человеческого капитала, формированию наиболее эффективных направлений его приумножения в планируемой перспективе. В частности, структура предложенных показателей позволяет осуществлять анализ и оценку: институциональных и экономических условий, образования и человеческих ресурсов, информационной инфраструктуры, инновационной системы страны⁶.

Кроме указанных, в состав предлагаемой системы должны включаться индикаторы, характеризующие текущее состояние научно-образовательного и инновационно-внедренческого сегментов общего экономического пространства страны и пропорции его макроэкономической сбалансированности (по численности занятых, количеству предприятий и организаций, объемам финансирования, размерам оплаты труда, доходам и вкладу в прирост ВВП, динамика доли оплаты труда в ВВП в целом по всей экономике, по ее отраслям и секторам, по научно-исследовательскому и инновационному секторам; пропорции между уровнями производительности, фондовооруженности, техновооруженности и оплаты труда; соотношение между физическим износом основных фондов и уровнем профессионально-возрастной квалификации занятых и др.).

Не менее важным показателем характеристики общего состояния экономического пространства и его научно-образовательного и инвестиционно-внедренческого сегментов, оценки его готовности к осуществлению нововведений являются индикаторы фондового рынка: уровень и динамика его капитализации, параметры изменений на протяжении определенного временного периода, индикация состояния нововведений и т. п. Общеизвестно, что фондовый рынок России пока еще не утратил своей спекулятивной роли и до сих пор не стал одним из институтов, способствующих трансформации инвестиций в повышение производственно-технологического потенциала и развитие человеческого капитала в национальной экономике, характеризующих рост национального благосостояния. Отношение темпов роста капитализации к темпам роста ВВП в процессе подготовки, принятия и реализации управленческих решений в действующей системе государственного регулирования процессов социально-экономического развития страны, как правило, не анализируется и не обосновывается не только по отраслям инновационно-внедренческой сферы, но также и по экономике в целом. Как и вся экономика страны, ее фондовый рынок характеризуется сырьевой ориентацией. В структуре последнего отсутствует сегмент идентификации состояния научно-

⁶ Измерение экономики знаний. Теория и практика. М. ИПРАН РАН. 2008. Сс. 90–94.

технологического пространства и индикаторы, отражающие тенденции развития инноваций и нововведений. Следствием этого является недостаток новых технологий и высокорентабельных проектов, соответствующих новым перспективным направлениям и требованиям научно-технического и социально-экономического развития.

Структура и пропорции ресурсного обеспечения. При определении пропорций распределения ресурсов (инвестиций), необходимых для оптимизации управления инновационным процессом, как правило, следует опираться на общие закономерности, присущие интенсивному типу воспроизводства и выражаемые, в частности, в статистическом законе деления затрат по структуре научно-производственного цикла, характеризующейся пропорцией затрат между ФИ, ПИ, ОКР и ОС. Указанная пропорция, как правило, устанавливается эмпирическим путем и для разных государств характеризуется разными соотношениями между стадиями инновационного процесса. Тем не менее в настоящее время наиболее обобщенными (унифицированными) соотношениями для индустриально развитых стран является следующая пропорция: 1:3:9:27. Г.М. Добровым предложено стоимостные затраты между стадиями инновационного процесса характеризовать пропорцией отражающей квадратическую зависимость от одной стадии к другой. Однако, следует отметить, что этот вопрос пока еще является дискуссионным и, с нашей точки зрения, учитывая специфический характер научно-исследовательской и производственно-хозяйственной деятельности для разных стран и регионов мира, отличающихся разной структурой общественного производства и разными системами управления его развитием, не может иметь однозначно унифицированного решения. Указанная пропорция предопределяется рядом факторов. Кроме уже названных, в их составе следует назвать: состояние среды производящей знания, т.е. потенциал ФИ; уровень развития и состояние предпринимательской среды; прогрессивность механизмов передачи знаний. В нашей стране фактически складывающиеся пропорции распределения затрат в структуре научно-инновационного процесса значительно отличаются от указанных соотношений.

Следует подчеркнуть, что структура инновационного процесса в значительной мере зависит, как уже отмечалось, от организации научно-образовательного и производственно-внедренческого потенциала в стране. В России этот потенциал распределен между государственным, предпринимательским, образовательным и частным секторами (табл. 1).

Возможности рационализации использования инновационного потенциала могут характеризоваться показателями материально-технического обеспечения научно-инновационной деятельности по институциональным секторам экономики, включая фондовооруженность и техническую вооруженность исследователей (табл. 2).

Таблица 1. Структура научно-образовательного потенциала: 2007

	Государственный	Предпринимательский	Образовательный	Частный
Число организаций	1483	1742	616	116
Численность персонала, тыс.	272,3	478,4	49,1	1,4
Затраты, всего, млн. руб.	107,0	238,4	23,5	1,2
В т.ч. ФИ	45,0	10,8	7,6	0,2
ПИ	17,8	26,7	9,4	0,6
Разработки	39,5	188,7	6,2	0,4

Источник: Наука, технологии и инновации России. 2008. ИПРАН РАН. М. 2008.

Таблица 2. Фондовооруженность и техническая вооруженность исследователей по секторам занятости: 2007

	Государственный	Предпринимательский	Образовательный	Частный	Академический
Фондовооруженность, тыс. руб.	163,2	68,4	242,7	164,8	170,3
Техновооруженность, тыс. руб.	57,9	27,8	41,0	56,0	55,0

Составлено по данным: «Наука, технологии и инновации России 2008.М. 2008. Фондовооруженность характеризует среднегодовую стоимость основных средств исследований и разработок в расчете на одного занятого, а техновооруженность – среднегодовая стоимость машин и оборудования в расчете на одного занятого. Эти показатели в таблице представлены в постоянных ценах 1995 г., в тыс. руб.

Из приведенных данных видно, что фондо- и техновооруженность труда в предпринимательском секторе по сравнению с другими секторами значительно, примерно в два раза ниже. Это можно объяснить тем обстоятельством, что предпринимательский сектор НИР в большей степени ориентирован на обеспечение внедрения результатов научных исследований в практику производственно-хозяйственной деятельности на основе освоения новых технологий и увеличения объемов производства инновационной продукции. В этой связи можно предложить исчислять коэффициент ориентированности рассматриваемых секторов общественного производства на инновационно-внедренческую деятельность, анализ которого позволит с определенной степенью условности определять уже имеющиеся, но в силу существующих недостатков в системе управления инновационными процессами, пока еще не реализованными возможностями для повышения эффективности инновационных процессов.

Важным показателем оценки состояния и использования интеллектуального потенциала национальной экономики и ее регионов может служить интегральный индекс уровня его развития, который предлагается рассчитывать применительно к сферам образования, науки, инновационно-внедренческой деятельности совместно с ИРЧП, ежегодно определяемым ООН по странам мировой экономики. При этом методология расчета указанного индекса должна быть скорректирована с учетом содержания интеллектуального потенциала. В частности, интеллект, как правило, характеризует тип поведения человека и в обыденной жизни рассматривается как «умное поведение». Интеллект – это система поведенческо-познавательных процессов, обеспечивающих реализацию способности человека оценивать ситуацию, принимать решения и в соответствии с этим регулировать свое поведение. Структура интеллекта зависит от целого ряда факторов: уровня образования, специфики профессии, возраста, сферы деятельности, индивидуальных особенностей и т.п. С учетом этого в данном случае при определении интеллектуального потенциала страны можно исходить из условия, что его величина может быть условно измерена только применительно к сферам научно-исследовательской деятельности.

Исходя из этого, по нашему мнению, необходимо уже сейчас при выработке и реализации управленческих решений на всех уровнях государственного управления руководствоваться следующими основополагающими принципами. Во-первых, хозяйственные действия государства должны быть выгодными и приносить пользу экономике страны в целом и хозяйствующим субъектам, функционирующим в соответствующих сегментах экономического пространства. Во-вторых, национальные активы и ресурсы следует направлять на поддержку и стимулирование развития тех сфер экономической и общественной

деятельности, которые позволят обеспечить рост эффективности и неуклонное снижение затрат на единицу полезности во времени, способствуя обеспечению динамизма социально-экономического развития. Государственная стратегия должна быть нацелена не столько на определенное качество и величину конечных благ и услуг, сколько на преодоление кризиса структуры и кризиса традиционных технологий. Это значит, что из множества проектов освоения государственных ресурсов предпочтение должен получить проект, нацеленный на улучшение технологий, а не конечных благ. Под улучшением технологий понимается их удешевление, обеспечение экологической безопасности, сокращение потребления природных и человеческих ресурсов. Стратегические решения следует ориентировать на реализацию таких проектов и технологий, которые пока еще отсутствуют на мировых рынках, но которые обязательно потребуются в самое ближайшее время и которые национальная хозяйственная система в состоянии произвести наиболее экономным способом.

В. Е. Чистякова,
к.э.н., старший научный сотрудник ИПРАН РАН

Постановка проблемы эффективного функционирования научно-инновационной системы

Л. П. Клеева

Наиболее яркой особенностью современного этапа развития мирового хозяйства следует считать переход развитых стран мира к инновационной экономике. Сегодня конкурентоспособность любой экономической системы – от предприятия до страны – тесно зависит от уровня ее инновационности. Однако сравнение России с развитыми странами мира по этому параметру выявляет ее отставание.

В таблице 1 представлены сравнительные данные инновационной активности экономики России и ведущих стран мира.

Из приведенных данных очевидно недопустимое отставание России в данной области, чреватое потерей ею международной конкурентоспособности.

Анализ причин низкой инновационной активности российской экономики приводит к отсутствию в ней эффективного функционирования национальной инновационной системы (НИС). Под инновационной системой обычно понимается несколько категорий, в качестве основных из которых можно выделить ([1]):

- синкретическую совокупность экономических субъектов и институтов, функционирование которых направлено на генерирование и диффузию инноваций;
- комплекс сопряженных экономических механизмов и видов деятельности, который обеспечивает инновационные процессы;
- систему отношений между элементами социального и экономического комплекса, порожденных нововведениями и инновационной деятельностью.

На сегодня существует несколько точек зрения на состав НИС, однако, в качестве основных элементов национальной инновационной системы обычно, выделяются:

- организации, проводящие НИОКР и, в результате, создающие новшества;
- предприятия реального сектора производства, которые эти новшества внедряют, преобразуя их, таким образом, в инновации;
- объекты инновационной инфраструктуры, осуществляющие связи создателей новшеств и потенциальных инноваторов;

Таблица 1. Основные показатели инновационной деятельности по ряду ведущих стран Европы*

	Россия	Великобритания	Германия	Италия	Португалия	Франция	Швеция
Удельный вес организаций, осуществивших технологические инновации, в общем числе обследованных организаций	8,5	43,0	65,1	36,3	40,9	32,6	50
Удельный вес отгруженных товаров, выполненных работ, услуг организаций, осуществлявших технологические инновации, в общем объеме отгруженных товаров, выполненных работ, услуг	31,2	73,4	89,3	64,8	67,6	68,4	74,5
Удельный вес новых для рынка инновационных товаров, работ, услуг в общем объеме отгруженных товаров, выполненных работ, услуг организациями промышленного производства	0,5	10,2	10,9	9,3	6,8	10,2	14,6
Удельный вес затрат на технологические инновации в общем объеме отгруженных товаров, выполненных работ, услуг	1,11	...	2,93	1,81	1,4	2,23	3,47

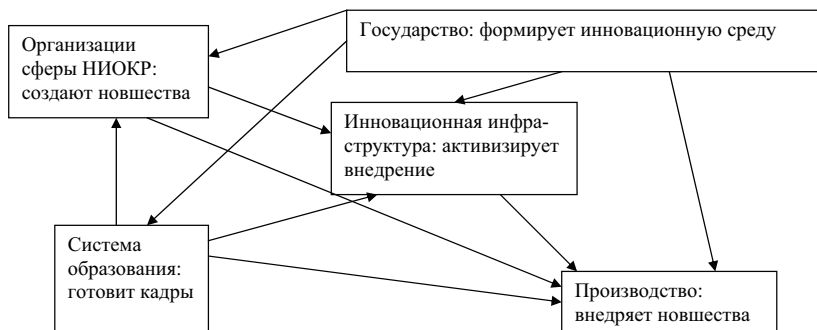
* Приведены данные по России за 2007 г., по странам Европы – итоги обследования инновационной деятельности за 2002–2006 гг.

- образовательная система, готовящая работников, способных к инновационной деятельности;
- государство, регулирующее и инициирующее инновационный процесс, в том числе и под воздействием общественных организаций.

Их взаимоотношения могут быть, в самом крупном виде отражены на схеме:

Заметим, что образовательные учреждения могут быть отнесены, как к системе образования, так и к сфере НИОКР (например, вузовская наука) и к инновационной инфраструктуре (внедренческие

Рисунок 1. Элементы инновационной системы



организации при вузах). Аналогично, научные организации могут выполнять образовательные функции, роль инфраструктуры и даже формировать инновационную среду (такие функции в советское время выполняла академическая среда).

На схема рис.1 связи между блоками показаны только в соответствии с выделенной основной функцией каждого блока. В действительности, эти связи носят двусторонний характер, что должно быть учтено при решении более конкретных задач. Так, производственные структуры не только внедряют новшества, инициирующие инновационный процесс, но и формируют заказ другим участникам НИС: научным организациям на создание новшеств, внедренческим структурам на обеспечение процесса их внедрения, образовательной системе на подготовку соответствующих кадров, государству – на создании определенной среды (используя, в том числе, общественные организации и другие способы проявления своих интересов). Научные организации решают задачи, поставленные производством, внедренческой инфраструктурой, образовательными системами (возможности которых также зависят от научных достижений) и государством и используют при этом предоставляемые им средства. Системы образования и внедренческая инфраструктура также имеют возможность влиять на всех других участников НИС. Иными словами, при более подробном анализе, все стрелки на схеме рис. 1 должны быть двусторонними.

Каждый из блоков представляет собой совокупность организаций или физических лиц, решающих определенную задачу, имеющих ограниченный объем ресурсов и решающий задачи по оптимизации некоторых параметров.

Пусть у нас имеется n организаций сферы НИОКР, тогда для каждой i -той организации ($i=1, \dots, n$), выпускающей некоторый объем работ и услуг s_i (векторную величину) будет справедливо множество ограничений по ресурсам:

$$U_i(s_i) \leq R_i$$

где U_i - затраты ресурсов (вектор) на производство единицы продукции s - того вида продукции i - ой организации сферы НИОКР;

R_i ограничения по ресурсам для i - ой организации.

Перечислим ресурсы организации сферы НИОКР по их важности:

- научные работники и материализованная в них научная среда (наивысшее достояние научной организации, см. [2]);
- денежные средства;
- научные заделы.

Остальные ресурсы являются производными, поскольку их ограниченность временная в том смысле, что достаточное количество денежных средств при выполнении необходимого условия наличия научного коллектива в научной среде достаточно высокого уровня гарантирует привлечение нужного количества вспомогательных работников, основных фондов науки, материалов и т.п.

В своей работе организаций сферы НИОКР будет максимизировать некую функцию, критерий оптимальности. В ее качестве могут выступать: прибыль, привлечение большего количества средств (на организацию или, например, по грантам), достижение научных результатов, рост престижа и т.п. Иными словами, цель работы организации:

$$\text{opt } F_i(s_i)$$

Таким образом, грубо говоря, поиск траектории развития организации сферы НИОКР может быть описан системой:

$$U_i(s_i) \leq R_i$$

$$\text{opt } F_i(s_i)$$

Приведенная выше запись множества ограничений и оптимизируемой функции означает, что они, строго говоря, могут быть любыми, что не нарушает логики анализа.

Аналогично, задачи остальных блоков могут быть описаны:

для внедренческих структур

$$U_m(v_m) \leq R_m$$

$$\text{opt } F_m(v_m)$$

где m - индекс внедренческой структуры,

v - объем ее работ;

для производства:

$$U_k(p_k) \leq R_k$$

$$\text{opt } F_k(p_k)$$

где k - индекс внедренческой структуры,

p - объем ее работ;

для образовательных систем:

$$U_j(e_j) \leq R_j$$

$$\text{opt } F_j(e_j)$$

где j – индекс внедренческой структуры,

t – объем ее работ.

Причем, если у производственных и внедренческих компаний снижается важность ресурса среды в ограничениях и, соответственно, растет доля величины прибыли в критерии оптимальности, то у образовательных организаций ситуация, фактически, аналогична сфере НИОКР: в них ценность представляет научно-образовательная среда и все, что способствует ее формированию.

Для описания блока государства также следует учесть ограничения по ресурсам, причем в данной задаче нет необходимости делить органы государства на структурные единицы:

$$U(g) \leq R$$

и оптимизацию некоторого критерия оптимальности:

$$\text{opt } F(g)$$

В качестве ограничений для государства следует в первую очередь учитывать не материальные ресурсы, а набор возможностей проведения политики, технологии ее проведения, ограничения по внутренней и внешней политике, в качестве критерия оптимальности: создание инновационной среды не в ущерб развитию других составляющих государственной политики.

Таким образом, мы получили систему из пяти блоков, каждый из которых в каждый момент ограничен ресурсами и оптимизирует некоторую функцию – критерий оптимальности:

сфера НИОКР:

$$U_i(s_i) \leq R_i$$

$$\text{opt } F_i(s_i)$$

внедренческие структуры:

$$U_m(v_m) \leq R_m$$

$$\text{opt } F_m(v_m)$$

производство:

$$U_k(p_k) \leq R_k$$

$$\text{opt } F_k(p_k)$$

образовательная система:

$$U_j(e_j) \leq R_j$$

$$\text{opt } F_j(e_j)$$

государство:

$$U(g) \leq R$$

$$\text{opt } F(g)$$

Самый поверхностный анализ данной системы позволяет выделить ее ключевое для нас свойство: в ней объединены производственная и

научная деятельность. В ряде работ ([2],[3],[4]) мы показывали их качественную разнородность, кратко, выражающуюся в:

– в различии целей: во-первых, наука исходит из целей получения нового знания, тогда как производство нацелено на создание и совершенствование конкретных продуктов с известными свойствами, во-вторых, производство подчинено экономическим критериям функционирования, а наука следует одновременно экономическим и научно-творческим (креативным) целям;

– в различии важности факторов производства: в научной деятельности наиболее важным фактором являются человеческие активы, тогда как в производстве навыки работников формируются на основе имеющихся основных производственных фондов и используемых технологий;

– в разной важности активов: для производства важнейшее значение имеют материальные и нематериальные активы, а для науки – наличие способных к креативной деятельности научных коллективов и материализованной в них научной среды, уровень, которой был бы достаточен для получения нетривиальных результатов.

В вышеупомянутых работах нами показано, что эффективное функционирование систем, объединяющих принципиально разную научную и производственную деятельность, обеспечивается выполнением двух условий эффективного функционирования:

необходимого условия (условия достижения технологической эффективности или условия непротиворечивости целей): *для эффективного функционирования научно-производственной системы цели ни одной из ее подсистем, выполняющих конкретные работы в ее рамках, не должны входить в противоречие с целями любой другой связанной с нею совместными работами подсистемы и системы в целом;*

достаточного условия экономически эффективного функционирования (условия согласованности целей): *для эффективного функционирования научно-производственной системы необходимо, чтобы цели каждой ее подсистемы соответствовали целям всех других подсистем, связанных с ней совместными работами, и целям системы в целом.*

Математически эти условия формулируются следующим образом: для любых двух подсистем обозначим за x_i объем работ (деятельности) любого вида, X – множество разных вариантов объема этих работ, определяемых наличием ресурсов и технологий, N_1 – индекс первой подсистемы, N_2 – индекс второй подсистемы, $F_{N_1}(x)$ – критерий оптимальности первой подсистемы, $F_{N_2}(x)$ – критерий оптимальности второй подсистемы, описывающие достижение целей функционирования системы.

Условие непротиворечивости целей элементов научно-производственной системы означает, что ни один вид работ на всем множестве своих значений не может быть включен в критерий оптимальности двух любых ее подсистем в виде функций разной направленности (возрастающей или убывающей), если оба критерия оптимальности формализованы, как максимум, или как минимум, и в виде функций одной направленности, если критерий оптимальности одной подсистемы формализован как максимум, а другой – как минимум.

В теоретико-множественных символах это может быть сформулировано: цели подсистем непротиворечивы, если

Условие согласованности целей предполагает, что для того, чтобы цели каждой подсистемы соответствовали целям другой, необходимо,

$$\forall \{x_{ij}\} (\{x_{ij}\} \in X, \forall N_1, N_2, \text{ если } \text{opt } F_{N_1}(x_i), F_{N_2}(x_i) = \max(\min), \Rightarrow$$

$$F_{N_1}(x_i) \uparrow (\downarrow) \wedge \neg [F_{N_2}(x_i) \downarrow (\uparrow)],$$

$$\text{если } \text{opt } F_{N_1}(x_i) = \max(\min), \text{opt } F_{N_2}(x_i) = \min(\max), \Rightarrow$$

$$F_{N_1}(x_i) \uparrow (\downarrow) \wedge \neg [F_{N_2}(x_i) \uparrow (\downarrow)].$$

чтобы всякая выгодная одной из них деятельность, была выгодна и всем другим, связанным с ней совместными работами. Это происходит, если всякий раз, когда увеличение объема каких-то работ приближает величину критерия оптимальности одной подсистемы к оптимуму, величина критерия оптимальности другой также приближается к оптимуму.

Математически это утверждение формулируется таким образом: для эффективной работы научно-производственной системы необходимо, чтобы для любой работы, на всем возможном множестве значений ее объема, включение ее величины в критерий оптимальности любой ее подсистемы или системы целом в виде возрастающей или убывающей функции автоматически означает включение ее величины в критерий оптимальности каждой другой подсистемы в виде функции той же направленности, если критерии оптимальности подсистем формализованы оба на максимум или на минимум, и в виде функции противоположной направленности, если критерий оптимальности одной подсистемы сформулирован на максимум, а другого – на минимум.

В теоретико-множественных символах это утверждение запишется:

$$\forall \{x_{ij}\} (x_i \in X) \forall N_1, N_2, \quad \text{если} \quad \text{opt } F_{N_1}(x_i) F_{N_2}(x_i) = \max(\min) \Rightarrow F_{N_1}(x_i) \uparrow (\downarrow) \Leftrightarrow$$

$$F_{N_2}(x_i) \uparrow (\downarrow),$$

$$\text{если } \text{opt } F_{N_1}(x_i) = \max(\min), \text{opt } F_{N_2}(x_i) = \min(\max) \Rightarrow F_{N_1}(x_i) \uparrow (\downarrow) \Leftrightarrow F_{N_2}(x_i) \downarrow (\uparrow).$$

Данное утверждение означает, что для двух связанных работами подсистем возрастание критерия оптимальности одной из них в какой-то точке должно совпадать с возрастанием критерия оптимальности другой, если оба сформулированы как максимум или как минимум, и с убыванием этого критерия, если один из них сформулирован как минимум, а второй – как максимум. Выполнение этого условия позволяет системе эффективно функционировать достаточно длительный период.

При работе с формализованной моделью научно-производственной системы два сформулированных условия легко проверяются. Если критерии оптимальности обеих подсистем являются дифференцируемыми функциями, то следует найти первую производную функции каждого критерия оптимальности. На тех значениях переменных, где первая производная положительна, функция возрастает, на тех значениях переменных, где производная отрицательна, функция убывает. Следует сопоставить значения переменных, на которых две функции возрастают и убывают, и, если оба критерия оптимальности сформулированы как максимум или как минимум, и эти значения будут совпадать, то условие выполняется, и система может работать эффективно. Если же один критерий сформулирован на максимум, а второй на минимум, то периоды возрастания одной функции должны совпадать с периодами убывания другой функции.

Для проверки непротиворечивости целей нужно иметь в виду, что на тех значениях переменных, где первая производная неотрицательна, функция не убывает, на тех значениях переменных, где производная не положительна, функция не возрастает. При анализе следует сопоставить значения переменных, на которых две функции не возрастают и не убывают, и, если оба критерия оптимальности сформулированы как максимум или как минимум, и эти значения будут совпадать, то условие выполняется, и цели системы непротиворечивы. Если же один критерий сформулирован как максимум, а второй как минимум, периоды не возрастания одной функции должны совпадать с периодами не убывания другой функции.

Если же одно из условий не выполнено, то исследователь получает те точки или промежутки изменения переменной, при которых условие эффективности не выполняется. Тогда он знает, в какой части должен быть изменен механизм работы системы, чтобы выполнялся критерий ее эффективной работы.

Если исследователь не предполагает использование формализованной модели работы системы, то он должен искать точки, в которых цели одной ее подсистемы не соответствуют целям другой и стараться исключить это несоответствие изменением механизма ее функционирования.

Поскольку мы показали, что национальная инновационная система является научно-производственной, то есть объединяет научную и производственную деятельность, следует признать, что сформулированные выше критерии должны рассматриваться в качестве условий ее эффективного функционирования.

Из данного анализа следует условие построения эффективной НИС: достижения согласования (или хотя бы непротиворечивости) целей всех ее элементов, поскольку они взаимодействуют и обеспечивают функционирование национальной инновационной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Государственная политика в области формирования национальной инновационной системы: Проблемы и решения. – М.: ИПРАН РАН, 2008.

2. Клеева Л.П. Необходимое и достаточное условия эффективного функционирования организаций сферы науки и научного обслуживания. - М., Вердана, 2001.

3. Клеева Л.П. Экономические механизмы управления российскими научными организациями в условиях рыночных преобразований. М.: Институт экономики РАН. 2003.

4. Клеева Л.П. Функционирование отраслевой науки в России в новых экономических условиях (монография). М: Экономический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002 г.

Л. П. Клеева,
д.э.н., зав. сектором ИПРАН РАН

Твердое тело в скалярном поле

М. А. Хмиадашвили, К. М. Схвитаридзе,
М. Г. Харашвили

Резюме. В работе рассмотрена гранично-контактная задача моментной теории упругости, которая описывает взаимодействие трехмерного и одномерного полей.

Решение поставленной задачи получено в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда.

1. ВВЕДЕНИЕ

В начале двадцатого столетия братьями Ежени и Франсуа Коссера были заложены основы нового подхода к теории упругости.

Этот подход учитывает вращательное взаимодействие частиц материала в деформируемом теле и, наряду с обычными напряжениями (сила, действующая на единицу площади) вводит в рассмотрение и моментные напряжения (моменты сил, действующих на единицу площади).

Так возникло новое направление в теории упругости сплошной среды – моментная теория упругости, которая в литературе известна под различными названиями: асимметричная теория упругости, теория Коссера, теория упругости с вращательными воздействиями частиц и т.д.

Эта теория долгое время оставалась без должного внимания и не получила широкого признания. Интерес к моментной теории упругости возрос за последнее время и различные аспекты стали предметом изучения многих авторов. Важные результаты изложены в книгах Е. Cosserat, F. Cosserat [3], В. Купрадзе, Т. Гегелия, М. Башелейшвили, Т. Бурчуладзе [9], в статьях Э. Аеро, Е. Кувшинского [1], В. Пальмова [13], Р. Миндлина, Г. Тирсмена [10], В. Коитера [8], М. Башелейшвили, Т. Гегелия, О. Маисаиа [2], Д. Натрошвили, А. Джагмаидзе [12], Л. Гиоргашвили [4] и др.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Уравнение статики моментной теории упругости при отсутствии объемных сил и объемного момента имеет вид [3]

$$\Delta(\mu - \nu\Delta)u(x) + (\lambda + \mu + \nu\Delta) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(x) = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$ – вектор смещения, Δ – оператор Лапласа, λ, μ, ν – постоянные, характеризующие физические свойства упругого тела, \top – символ транспонирования.

Введем следующие векторы:

$$\begin{aligned} R(\partial x, n)u &= \operatorname{rot} u - n(n \cdot \operatorname{rot} u), \\ Q(\partial x, n)u &= \frac{1}{2} [q(u) - n(n \cdot q(u))], \\ P(\partial x, n)u &= T(\partial x, n)u + \nu [n \times \Delta \operatorname{rot} u] - \frac{1}{2} [n \times \operatorname{grad}(n \cdot q(u))], \end{aligned} \quad (2)$$

где $n(x)$ – единичный вектор,

$$q(u) = 2(\nu + \nu') \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{rot} u + 2\nu' [n \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} u] \quad (3)$$

моментное напряжение, ν' – физическая постоянная, $T(\partial x, n)u$ – вектор напряжения

$$T(\partial x, n)u = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div} u + \mu [n \times \operatorname{rot} u], \quad (4)$$

постоянные λ, μ, ν, ν' удовлетворяют неравенствам

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad |\nu'| \leq \nu. \quad (5)$$

Пусть \mathbb{R}^3 трехкомпонентное евклидово пространство, а $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ конечная область ограниченная поверхностью $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Определение. Вектор $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, определенный в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, будем называть регулярным, если $u_k \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2, 3$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Для того, чтобы вектор $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ являлся решением системы дифференциальных уравнений (1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно его представимость в виде*

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{grad} \Phi_1(x) - a \operatorname{grad} r^2 \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) \Phi_2(x) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (x r^2 \Phi_2(x)) \\ &+ \operatorname{rot} (x \Phi_3(x)) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (x \Phi_4(x)) + \operatorname{rot} (x \Phi_5(x)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Phi_j(x)$, $j = 1, 2, 3$ – скалярные гармонические функции, $\Phi_j(x)$, $j = 4, 5$ – скалярные метагармонические функции:

$$\Delta \Phi_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (\Delta - e^2) \Phi_j(x) = 0, \quad j = 4, 5,$$

$$e^2 = \frac{\mu}{\nu}, \quad a = \mu(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$$r = |x|, \quad r \frac{\partial}{\partial r} = x \cdot \operatorname{grad}.$$

Задача (А). В областях Ω^+ и Ω^- , соответственно, найти регулярный вектор $u(x)$ и функцию $v(x)$, удовлетворяющие:

1. уравнениям

$$\Delta(\mu - \nu\Delta)u(x) + (\lambda + \mu + \nu\Delta) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(x) = 0, \quad x \in \Omega^+,$$

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega^-;$$

2. граничным условиям

$$[n(z) \cdot u(z)]^+ - d_1 \left[\frac{\partial v(z)}{\partial n(z)} \right]^- = f_4(z), \quad z \in \partial\Omega,$$

$$[P(\partial z, n) \cdot u(z)]^+ - d_2 n(z)[v(z)]^- = f^{(1)}(z), \quad z \in \partial\Omega,$$

$$[R(\partial z, n) \cdot u(z)]^+ = f^{(2)}(z), \quad z \in \partial\Omega;$$

3. функция $v(x)$ в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяет условиям

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} = o(|x|^{-1}), \quad j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

где $f^{(j)} = (f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, f_3^{(j)})$, $j = 1, 2$; $f_k^{(j)}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$, а также $f_4(z)$ заданные на $\partial\Omega$ функции, $n(z)$ — орт внешней относительно Ω^+ нормали в точке $z \in \partial\Omega$, d_1, d_2 — постоянные, удовлетворяющие условию $d_1 d_2 > 0$.

Теорема 2. Если $d_1 d_2 > 0$, то задача (А) допускает не более одного регулярного решения.

Доказательство. Теорема будет доказана, если однородная задача $(A)_0$ ($f^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$, $f_4 = 0$) имеет только тривиальное решение.

Напишем формулу Грина для системы дифференциальных уравнений (1) [2]

$$\int_{\Omega^+} [u(x) \cdot M(\partial x)u(x) + E(u, u)] dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} [u(z) \cdot P(\partial z, n)u(z) + R(\partial z, n)u(z) \cdot Q(\partial z, n)u(z)]^+ ds, \quad (8)$$

где векторы $R(\partial z, n)u$, $Q(\partial z, n)u$ и $P(\partial z, n)u$ имеют вид (2).

Формула Грина для гармоничной функции $v(x)$ имеет вид [14]

$$\int_{\Omega^-} [v(x)\Delta v(x) + (\operatorname{grad} v(x))^2] dx = - \int_{\partial\Omega} \left[v(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n(z)} \right]^- ds, \quad (9)$$

Из граничных условий однородной задачи $(A)_0$ следует:

$$u(z)P(\partial z, n)u(z) = d_1 d_2 v(z) \frac{\partial v(z)}{\partial n(z)}.$$

Учитывая это равенство и то, что

$$[R(\partial z, n)u(z)]^+ = 0, \quad M(\partial x)u(x) = 0, \quad \Delta v(x) = 0,$$

Из (8) и (9) получим

$$\int_{\Omega^+} E(u, u) dx + d_1 d_2 \int_{\Omega^-} (\text{grad } v(x))^2 dx = 0. \quad (10)$$

В выражениях (8) и (10)

$$\begin{aligned} E(u, u) = & \frac{3\lambda + 2\mu}{3} (\text{div } u)^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{k,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kj} \text{div } u \right)^2 \\ & + (\nu + \nu') \sum_{k,j=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} \right)^2 + (\nu - \nu') \sum_{k,j=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \right)^2, \end{aligned}$$

где $\omega_j = \frac{1}{2}(\text{rot } u)_j$, $j = 1, 2, 3$.

Из равенства (10), учитывая (5) и условие $d_1 d_2 > 0$, получим

$$E(u(x), u(x)) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad \text{grad } v(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

Решение этих уравнений имеет вид [2]

$$\begin{aligned} u(x) &= [a \times x] + b, \quad x \in \Omega^+, \\ v(x) &= c = \text{const}, \quad x \in \Omega^-, \end{aligned} \quad (11)$$

где a и b – трехкомпонентные постоянные векторы.

Поскольку $v(x)$ удовлетворяет условию (7), то $v(x) = 0$, $x \in \Omega^-$. Учитывая последнее, гранично-контактные условия задачи $(A)_0$ запишутся в виде

$$[n(z)u(z)]^+ = 0, \quad z \in \partial\Omega, \quad (12)$$

$$[P(\partial z, n)u(z)]^+ = 0, \quad z \in \partial\Omega, \quad (13)$$

$$[R(\partial z, n)u(z)]^+ = 0, \quad z \in \partial\Omega. \quad (14)$$

Если значения вектора $u(x)$ из (11) внесем в (12), получим $b = 0$, а уравнение (13) удовлетворяется автоматически. Таким образом, из (12) и (13) следует, что $u(x) = [a \times x]$. Если это значение $u(x)$ внесем в (14), получим: $a - n(n \cdot a) = 0$, т.е. $a = n(n \cdot a)$. Внеся это значение a в равенство $u(x) = [a \times x]$, получим $u(x) = 0$, $x \in \Omega^+$.

Таким образом, однородная задача $(A)_0$ имеет только тривиальное решение. Это означает, что неоднородная задача (A) допускает не более одного решения.

В дальнейшем будем считать, что Ω^+ шар ограниченный сферической поверхностью $\partial\Omega$ с центром в начале координат и радиусом R , т.е.

$$\Omega^+ = \{x : x \in R^3, |x| < R\}, \quad \partial\Omega = \{x : x \in R^3, |x| = R\}, \quad \Omega^- = R^3 \setminus \overline{\Omega^+}.$$

Решение задачи будем искать в виде (6), где функции $\Phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, 5$, представлены формулами [14]

$$\begin{aligned} \Phi_j(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left(\frac{r}{R}\right)^k Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) A_{mk}^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \\ \Phi_j(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k g_k(er) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) A_{mk}^{(j)}, \quad j = 4, 5. \end{aligned} \quad (15)$$

(r, ϑ, φ) – сферические координаты точки $x \in \Omega^+$, $A_{mk}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, 5$, искомые постоянные,

$$\begin{aligned} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!}} P_k^{(m)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \\ g_k(er) &= \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(lr)}{I_{k-\frac{1}{2}}(lr)}, \quad e^2 = \frac{\mu}{v}, \end{aligned}$$

$P_k^{(m)}(\cos \vartheta)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода степени k и порядка m , $I_{k+1/2}(er)$ – функция Бесселя мнимого аргумента и полуцелого порядка.

$v(x)$ будем искать в виде [14]

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) A_{mk}^{(6)}, \quad (16)$$

где A_{mk} – искомые постоянные.

Из (16) следует

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n(x)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \frac{k+1}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+2} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) A_{mk}^{(6)}. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы функции $\Phi_j(x)$, $j = 1, 3, 4, 5$ удовлетворяли условию

$$\int_{\partial\Omega_1} \Phi_j(x) ds = 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, \quad (18)$$

где $\partial\Omega_1$ – сфера с центром в начале координат и радиусом R_1 ($0 < R_1 < R$).

Если значение функции $\Phi_j(x)$, $j = 1, 3, 4, 5$ из (15) внесем в последнее равенство, получим $A_{00}^{(j)} = 0$, $j = 1, 3, 4, 5$.

Внеся значения функции $\Phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, 5$ из (15) в (6) и учитывая равенства [6]

$$\begin{aligned} \text{grad} [a(r)Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi)] &= \frac{da(r)}{dr} X_{mk}(\vartheta, \varphi) \\ &\quad + \sqrt{k(k+1)} \frac{a(r)}{r} Y_{mk}(\vartheta, \varphi), \\ \text{rot} [xa(r)Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi)] &= \sqrt{k(k+1)} a(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\ \text{rot rot} [xa(r)Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi)] &= \frac{k(k+1)}{r} a(r) X_{mk}(\vartheta, \varphi) \\ &\quad + \sqrt{k(k+1)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) a(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (19)$$

получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ u_{mk}(r) X_{mk}(\vartheta, \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{k(k+1)} [v_{mk}(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi) + w_{mk}(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi)] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} X_{mk}(\vartheta, \varphi) &= e_r Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad k \geq 0, \\ Y_{mk}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(e_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{e_{\varphi}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad k \geq 1, \\ Z_{mk}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\frac{e_{\vartheta}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - e_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

$|m| \leq k$, e_r , e_{ϑ} , e_{φ} – единичные ортогональные векторы:

$$\begin{aligned} e_r &= (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^{\top}, \\ e_{\vartheta} &= (\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta)^{\top}, \\ e_{\varphi} &= (-\sin \varphi, \cos \vartheta, 0)^{\top}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{mk}(r) &= \frac{k}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} A_{mk}^{(1)} + R(k+1)(kb-2a) \left(\frac{r}{R}\right)^{k+1} A_{mk}^{(2)} \\
&\quad + \frac{k(k+1)}{r} g_k(lr) A_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 0, \\
v_{mk}(r) &= \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} A_{mk}^{(1)} + R[b(k+1)+2] \left(\frac{r}{R}\right)^{k+1} A_{mk}^{(2)} \\
&\quad + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) g_k(lr) A_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 1, \\
w_{mk}(r) &= \left(\frac{r}{R}\right)^k A_{mk}^{(3)} + g_k(r) A_{mk}^{(5)}, \quad k \geq 1, \quad b = 1 - a.
\end{aligned}$$

Заметим, что в (20) и аналогичных рядах в дальнейшем в слагаемых содержащих $Y_{mk}(\vartheta, \varphi)$ и $Z_{mk}(\vartheta, \varphi)$, индекс суммирования k изменяется от 1 до $+\infty$.

Из (20) учитывая тождества [6]

$$\begin{aligned}
e_r \cdot X_{mk}(\vartheta, \varphi) &= Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \quad e_r \cdot Y_{mk}(\vartheta, \varphi) = 0, \quad e_r \cdot Z_{mk}(\vartheta, \varphi) = 0, \\
e_r \times X_{mk}(\vartheta, \varphi) &= 0, \quad e_r \times Y_{mk}(\vartheta, \varphi) = -Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
e_r \times Z_{mk}(\vartheta, \varphi) &= Y_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
\text{rot} [a(r)X_{mk}(\vartheta, \varphi)] &= \sqrt{k(k+1)} \frac{a(r)}{r} Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
\text{rot} [a(r)Y_{mk}(\vartheta, \varphi)] &= -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) a(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
\text{rot} [a(r)Z_{mk}(\vartheta, \varphi)] &= \sqrt{k(k+1)} \frac{a(r)}{r} X_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
&\quad + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) a(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi),
\end{aligned} \tag{21}$$

получим

$$\begin{aligned}
&R(\partial x, n)u(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \sqrt{k(k+1)} [v_{mk}^{(1)}(r)Y_{mk}(\vartheta, \varphi) + w_{mk}^{(1)}(r)Z_{mk}(\vartheta, \varphi)], \\
&Q(\partial x, n)u(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \sqrt{k(k+1)} [v_{mk}^{(2)}(r)Y_{mk}(\vartheta, \varphi) + w_{mk}^{(2)}(r)Z_{mk}(\vartheta, \varphi)].
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
v_{mk}^{(1)}(r) &= \frac{k+1}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} A_{mk}^{(3)} + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) g_k(lr) A_{mk}^{(5)}, \quad k \geq 1, \\
w_{mk}^{(1)}(r) &= -2(2k+3) \left(\frac{r}{R}\right)^k A_{mk}^{(2)} - l^2 g_k(lr) A_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{mk}^{(2)}(r) &= \frac{(\nu + \nu')(k^2 - 1)}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-2} A_{mk}^{(3)} \\
&\quad + \left[(\nu + \nu') \left(-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{k^2 + k - 1}{r^2} \right) + \mu \right] g_k(lr) A_{mk}^{(5)}, \quad k \geq 1, \\
w_{mk}^{(2)}(r) &= \frac{2(2k+3)(\nu' - \nu k)}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} A_{mk}^{(2)} \\
&\quad + l^2 \left(\frac{\nu'}{r} - \nu \frac{d}{dr} \right) g_k(lr) A_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

Если значения вектора $u(x)$ из (19) внесем в $P(\partial x, n)u$ имеющий вид (2) и учтем равенства (18), (20), (21), а также тождества [6]

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} [a(r)X_{mk}(\vartheta, \varphi)] &= \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) a(r) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \\
\operatorname{div} [a(r)Y_{mk}(\vartheta, \varphi)] &= -\sqrt{k(k+1)} \frac{a(r)}{r} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad (23) \\
\operatorname{div} [a(r)Z_{mk}(\vartheta, \varphi)] &= 0,
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
P(\partial x, n)u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ a_{mk}(r) X_{mk}(\vartheta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{k(k+1)} [b_{mk}(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi) + c_{mk}(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi)] \right\}, \quad (24)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} a_{mk}(r) &= \frac{k(k-1)}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-2} A_{mk}^{(1)} + (k+1) [b(k^2 - k - 4) + 1] \left(\frac{r}{R}\right)^k A_{mk}^{(2)} \\
&\quad + k(k+1) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} g_k(lr) \right] A_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 0, \\
\frac{1}{2\mu} b_{mk}(r) &= \frac{k-1}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-2} A_{mk}^{(1)} + [b(k+1)^2 - 1] \left(\frac{r}{R}\right)^k A_{mk}^{(2)} \\
&\quad - \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2 + k - 1}{r^2} \right) g_k(lr) A_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 1, \\
c_{mk}(r) &= \left[\frac{\mu(k-1)}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} + \frac{(\nu + \nu')k(k^2 - 1)}{R^3} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-3} \right] A_{mk}^{(3)} \\
&\quad + \left[-\frac{2\mu}{r} + \frac{(\nu + \nu')k(k+1)}{r^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \right] g_k(lr) A_{mk}^{(5)}, \quad k \geq 1,
\end{aligned}$$

Если учтем, что $n \times \operatorname{rot} u = n \times R(\partial x, n)u$, из (21), учитывая (20), получим

$$n \times \operatorname{rot} u(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \sqrt{k(k+1)} \left[w_{mk}^{(1)}(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi) - v_{mk}^{(1)}(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]. \quad (25)$$

Пусть векторы $f^{(j)}(z)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют достаточным условиям, при которых можно их разложить в ряд Фурье–Лапласа в системе $\{X_{mk}(\vartheta, \varphi), Y_{mk}(\vartheta, \varphi), Z_{mk}(\vartheta, \varphi)\}_{|m| \leq k, k = \overline{0, \infty}}$

$$f^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ \alpha_{mk}^{(j)} X_{mk}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{k(k+1)} \left[\beta_{mk}^{(j)} Y_{mk}(\vartheta, \varphi) + \gamma_{mk}^{(j)} Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right] \right\}. \quad (26)$$

где $\alpha_{mk}^{(j)}$, $\beta_{mk}^{(j)}$, $\gamma_{mk}^{(j)}$, $j = 1, 2$, – коэффициенты Фурье.

Поскольку $n(z) \cdot f^{(2)}(z) = 0$, из (26) получим

$$f^{(2)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \sqrt{k(k+1)} \left[\beta_{mk}^{(2)} Y_{mk}(\vartheta, \varphi) + \gamma_{mk}^{(2)} Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]. \quad (27)$$

Разложим функцию $f_4(z)$ в ряд Фурье–Лапласа в системе $\{Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi)\}_{|m| \leq k, k = \overline{0, \infty}}$:

$$f_4(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \alpha_{mk} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad (28)$$

где α_{mk} – коэффициенты Фурье.

Из (19) имеем

$$n(x)u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k u_{mk}(r) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi). \quad (29)$$

Если в равенстве (22) (первое равенство), (24), (16), (17) и (29) перейдем к пределу, когда $x \rightarrow z \in \partial\Omega$ ($r \rightarrow R$) и учтем как граничные условия задачи (A), так и формулы (26), ($j = 1$), (27) и (28), для искомым постоянных A_{mk} , $j = 1, 2, \dots, 6$, получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{k}{R} A_{mk}^{(1)} + R(k+1)(kb - 2a)A_{mk}^{(2)} + \frac{k(k+1)}{R} A_{mk}^{(4)} \\ & + \frac{k(k+1)}{R} A_{mk}^{(4)} - \frac{d_1(k+1)}{R} A_{mk}^{(6)} = \alpha_{mk}, \quad k \geq 0, \\ & \frac{2\mu k(k-1)}{R^2} A_{mk}^{(1)} + 2\mu(k+1)[b(k^2 - k - 4) + 1]A_{mk}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\mu k(k+1)\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}g_k(lR)\right)A_{mk}^{(4)} - d_2A_{mk}^{(6)} = \alpha_{mk}, \quad k \geq 0, \\
& \frac{k-1}{R^2}A_{mk}^{(1)} + [b(k+1)^2 - 1]A_{mk}^{(2)} \tag{30} \\
& -\left(\frac{1}{R}\frac{d}{dR} - \frac{k^2+k-1}{R^2}\right)g_k(lR)A_{mk}^{(4)} = \frac{1}{2\mu}\beta_{mk}^{(1)} \quad k \geq 1, \\
& -2(2k+3)A_{mk}^{(2)} - l^2A_{mk}^{(4)} = \gamma_{mk}^{(2)}, \quad k \geq 1, \\
& \frac{k+1}{R^2}A_{mk}^{(3)} + \left(\frac{d}{dR} + \frac{1}{R}\right)g_k(lR)A_{mk}^{(5)} = \beta_{mk}^{(2)}, \quad k \geq 1, \\
& \frac{k-1}{R^3}[\mu R^2 + (\nu + \nu')k(k+1)]A_{mk}^{(3)} \\
& + \frac{1}{R^2}\left[-2\mu R + (\nu + \nu')k(k+1)\left(\frac{d}{dR} - \frac{1}{R}\right)\right]g_k(lR)A_{mk}^{(5)} = \gamma_{mk}^{(1)}, \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

Докажем следующую лемму

Лемма. Если функции $\Phi_j(x)$, $j = 1, 3, 4, 5$, удовлетворяют условию (18), то каждому нулевому значению вектора $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ соответствует нулевое значение вектора $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_5)^\top$ и наоборот.

Доказательство. Из представления (6) следует, что если $x \in \Omega^+$, то

$$\begin{aligned}
& \left(2r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right)\Phi_2(x) = -\frac{1}{2a}\operatorname{div} u(x), \\
& r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi_3(x) = -\frac{1}{l^2}x \cdot (\Delta - l^2)\operatorname{rot} u(x), \tag{31} \\
& r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - l^2\right)\Phi_4(x) = -\frac{1}{l^4}x \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} u(x), \\
& r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - l^2\right)\Phi_5(x) = \frac{1}{l^2}x \cdot \Delta \operatorname{rot} u(x); \\
& \operatorname{grad} \Phi_1(x) = u(x) + a \operatorname{grad} r^2\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right)\Phi_2(x) - \operatorname{rot} \operatorname{rot}(xr^2\Phi_2(x)) \\
& \quad - \operatorname{rot}(x\Phi_3(x)) - \operatorname{rot} \operatorname{rot}(x\Phi_4(x)) - \operatorname{rot}(x\Phi_5(x)). \tag{32}
\end{aligned}$$

Если в равенстве (31) допустим, что $u(x) = 0$, $x \in \Omega^+$, получим

$$\begin{aligned} \left(2r \frac{\partial}{\partial r} + 3\right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1\right) \Phi_2(x) &= 0, \\ r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \Phi_3(x) &= 0, \\ r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - l^2\right) \Phi_j(x) &= 0, \quad j = 4, 5. \end{aligned} \quad (33)$$

Внеся значения функции $\Phi_j(x)$, $j = 2, 3, 4, 5$ из (15) в (33) и учитывая условия (18), получим $\Phi_j(x) = 0$, $j = 2, 3, 4, 5$, а из (32) следует, что $\text{grad } \Phi_1(x) = 0$, т.е. $\Phi_1(x) = c = \text{const}$, $x \in \Omega^+$. Поскольку $\Phi_1(x)$ удовлетворяет условию (18), то $c = 0$. Этим первая часть леммы доказана. Вторая часть леммы вытекает непосредственно из формулы (6). \square

Из теоремы 3 и леммы следует, что система (30) совместима. Если решение этой системы внесем в (20) и (16), получим решение задачи (A).

Ряды (22), (24), (25), (29) будут абсолютно и равномерно сходиться если $f_4(z) \in C^3(\partial\Omega)$, $f^{(j)}(z) \in C^4(\partial\Omega)$, $j = 1, 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аеро Э., Кувшинский Е., Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. *Физика твердого тела* **2**(1960), № 7, 1399–1409.
2. Башелейшвили М., Гегелиа Т., Маимаиа О., Некоторые граничные задачи моментной теории упругости. *Аннотация докл. ИПМ ТГУ*, 1970, 105–174.
3. Cosserat E., Cosserat F., *Therie des corps deformables*. *Herman, Paris*, 1909.
4. Гиоргашвили Л., Гранично-контактные задачи статики моментной теории упругости для кусочно однородных изотропных сред. *Аннотация докл. ИПМ ТГУ* **8**(1970), 53–63.
5. Гиоргашвили Л., Решение основных граничных задач статики теории упругости для шара. *Труды ИПМ ТГУ*, 1981, 32–36.
6. Giorgashvili L., Solution of the basic boundary value problems of stationary thermoelastic oscillations for domains bounded by spherical surfaces. *Georgian Math. J.* **4**(1997), No. 5, 421–438.
7. Гиоргашвили Л., Схвитаридзе К., Граничные задачи для вязкой несжимаемой микрополярной жидкости, ограниченной сферическими поверхностями. *Сборник статей фак. вычисл. матем. и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова*, 2002, 29–39.
8. Koiter W., Couple-stresses in the theory of elasticity. I, II. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B* **67**(1964), 17–29, 30–44.

9. Купрадзе В., Гегелиа Т., Башелейшвили М., Бурчуладзе Т., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. *Наука, Москва*, 1976.
10. Mindlin R., Tiersten H., Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch Ration. Mech. Anal.* **11**(1962), No. 5, 415–448.
11. Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики. *Изд-во иностранной литературы, Москва* **2**(1980).
12. Натрошвили Д., Джагмаидзе А., Динамические задачи для кусочно-однородных тел с учетом моментных напряжений. *Труды ИПМ ТГУ* **16**(1985), 155–181.
13. Пальмов В., Основные уравнения теории несимметричной упругости. *ПММ* **28**(1964), № 3, 401–408.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики. *Наука, Москва*, 1972.
15. Хмндашвили М., Решение основных граничных задач статики моментной теории упругости для шара. *Труды ИПМ ТГУ* **46**(1992), 215–226.

Грузинский технический университет
Департамент математики
ул. М. Костава 77, Тбилиси 0175
Грузия

Движение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве с шаровой полостью

**К. М. Схвитаридзе, М. А. Хмиадашвили,
М. Г. Харашвили**

Резюме. В настоящей работе изучено движение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве, когда в ней помещено шар. На поверхности шара задано граничные значения вектора скорости или напряжения, а на поверхности полупространства заданы касательные составляющие вектора скорости и нормальная составляющая вектора напряжения или касательные составляющие вектора напряжения и нормальная составляющая вектора скорости.

Существенную роль в решении поставленной задачи играет формула общего решения системы однородных дифференциальных уравнений Навье–Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости, представленная тремя гармоническими функциями.

Рассматриваемая задача сводится к изучению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Доказано, что полученная система квазирегулярна. Изучен вопрос регулярности вектора скорости, а также функции давления.

ВВЕДЕНИЕ

Построение эффективных решений различных граничных и контактных задач механики сплошных сред (классической и обобщенной моделей) имеет огромное теоретическое и практическое значение. К сожалению, построение точных решений в явном виде возможно только для тел конкретной геометрической конфигурации. Здесь существенную роль играет тот факт, что общее решение системы сложных дифференциальных уравнений (Лапласа и Гельмгольца).

В этом направлении в области механики сплошных сред общеизвестны труды Кельвина, Адамара, Буссинеского, Колосова–Мусхелишвили, в которых вектор смещения представлен гармоническими и бигармоническими функциями. Указанное представление дает возможность разбить метод Фурье (метод разделения переменных в определенной криволинейной системе координат) в теории механики сплошных сред в случае канонических областей. С помощью этого метода многими исследователями (Г. Ляме, Ж. Адамар,

В. Кельвин, Н. Мухелишвили, В. Купрадзе, М. Башелейшвили, Л. Гиоргашвили, К. Схвитаридзе, Р. Чичинадзе и др.) решены основные граничные задачи теории упругости, термоупругости, вязкой несжимаемой жидкости в явном виде различными подходами.

1. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Предположим, что вязкая несжимаемая жидкость заполняет полупространство $x_3^{(1)} < d/2$ с шаровой полостью. Обозначим через $\partial\Omega$ плоскость $x_3^{(1)} = d/2$, а через $\partial\Omega_1$ сферу ограничивающую шаровую полость с центром в точке O_1 и радиусом R . Область занимающим жидкостом обозначим через Ω^- .

Задача. *Найти в Ω^- регулярный вектор скорости $u(x)$ ($u \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\bar{\Omega}^-)$) и давление $p(x)$ ($p \in C^1(\Omega^-) \cap C(\bar{\Omega}^-)$), которые в этой области удовлетворяют однородной системе дифференциальных уравнений Стокса [5], [6]*

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u(x) + \text{grad } p(x) &= 0, \quad x \in \Omega^-, \\ \text{div } u(x) &= 0, \quad x \in \Omega^- \end{aligned} \quad (1.1)$$

на границе $\partial\Omega$ одному из следующих граничных условий

$$[u_j(z)]^+ = 0, \quad [T(\partial, n)U(z)]_3^+ = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

или

$$[T(\partial, n)U(z)]_j^+ = 0, \quad [u_3(z)]^+ = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.3)$$

на границе $\partial\Omega_1$ одному из следующих граничных условий

$$[u(z)]^- = f(z), \quad (1.4)$$

или

$$[T(\partial, n)U(z)]^- = f(z), \quad (1.5)$$

в окрестности бесконечно удаленной точки следующим условиям

$$\begin{aligned} u_j(x) &= O(|x|^{-1}), \quad p(x) = o(|x|^{-1}), \\ \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_k} &= O(|x|^{-1}), \quad k, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$, μ – коэффициент вязкости, $f = (f_1, f_2, f_3)^\top$, $f_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, заданные на $\partial\Omega_1$ функции, $U = (u, p)^\top$, $T(\partial, n)U$ – вектор напряжения, имеющий вид [5], [6]

$$T(\partial, n)U = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} - pn + \mu[n \times \text{rot } u], \quad (1.7)$$

$n(z)$ – орт внешней нормали в точке $z \in \partial\Omega \cup \partial\Omega_1$, \top – символ транспонирования, через $[u(z)]^\pm$ обозначен предел

$$[u(z)]^+ = \lim_{\Omega^- \ni x \rightarrow z \in \partial\Omega} u(x), \quad [u(z)]^- = \lim_{\Omega^- \ni x \rightarrow z \in \partial\Omega_1} u(x),$$

Для краткости будем обозначать через $(I \cdot I)^-$ граничную задачу с условиями (1.2) и (1.4), через $(I \cdot II)^-$ – с условиями (1.2) и (1.5), через $(II \cdot I)^-$ – с условиями (1.3) и (1.4) и через $(II \cdot II)^-$ – с условиями (1.3) и (1.6).

Теорема 1.1. *Задачи $(I \cdot I)^-$ – $(II \cdot II)^-$ имеют не более одного решения.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если докажем, что однородные задачи $(I \cdot I)_0^-$ – $(II \cdot II)_0^-$ ($f(z) = 0$) имеют только тривиальное решение.

Напишем формулу Грина для системы (1.1) в области Ω^- [8]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} u \cdot (\mu \Delta u - \text{grad } p) \, dx &= \int_{\partial\Omega} [u(z)]^+ \cdot [T(\partial, n)U(z)]^+ \, ds \\ &- \int_{\partial\Omega_1} [u(z)]^- \cdot [T(\partial, n)U(z)]^- \, ds - \int_{\Omega^-} E(u, u) \, dx \end{aligned} \quad (1.8)$$

Принимая во внимание условия (1.1)–(1.5) однородных задач $(I \cdot I)_0^-$ – $(II \cdot II)_0^-$, получим

$$\int_{\Omega^-} E(u, u) \, dx = 0, \quad (1.9)$$

где

$$E(u, u) = \frac{\mu}{2} \sum_{k,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2.$$

Из этого равенства, учитывая (1.9) следует

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad k, j = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega^-.$$

Решение этой системы имеет вид

$$u(x) = [a \times x] + b \quad (1.10)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$, a_j, b_j $j = 1, 2, 3$, – произвольные постоянные.

Внеся значение $u(x)$ из (1.10) в (1.1), получим $p(x) = p_0$, $x \in \Omega^-$, где p_0 – произвольная постоянная.

Поскольку $u(x)$ и $p(x)$ удовлетворяют условиям (1.6), то $a = 0$, $b = 0$, $p_o = 0$, т.е. $u(x) = 0$, $p(x) = 0$, $x \in \Omega^-$.

2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

Обозначим через r , ϑ , φ ($0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) сферические координаты точки $x \in \mathbb{R}^3$. Введем следующие векторы [7]

$$\begin{aligned} X_{mk}(\vartheta, \varphi) &= e_r Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad k \geq 0, \\ Y_{mk}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(e_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{e_\varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad k \geq 1, \\ Z_{mk}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\frac{e_\varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - e_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $|m| \leq k$, e_r , e_ϑ , e_φ – единичные ортогональные векторы:

$$\begin{aligned} e_r &= \left(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta \right)^T, \\ e_\vartheta &= \left(\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta \right)^T, \\ e_\varphi &= \left(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0 \right)^T, \\ Y_m^{(m)}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2k+1}{4\Pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+1)!}} P_k^{(m)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$P_k^{(m)}(\cos \vartheta)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода k -той степени и m -го порядка [10].

На сфере единичного радиуса множества

$$\left\{ X_{mk}(\vartheta, \varphi), Y_{mk}(\vartheta, \varphi), Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \right\}_{|m| \leq k, k=0, \infty}$$

образуют полную ортонормированную систему вектор-функций в пространстве L_2 .

Справедливы следующие тождества [1], [2]

$$\begin{aligned}
 e_r \cdot X_{mk}(\vartheta, \varphi) &= Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad e_r \cdot Y_{mk}(\vartheta, \varphi) = 0, \\
 e_r \cdot Z_{mk}(\vartheta, \varphi) &= 0, \\
 e_2 \times X_{mk}(\vartheta, \varphi) &= 0, \quad e_r \times Y_{mk}(\vartheta, \varphi) = -Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
 e_r \times Z_{mk}(\vartheta, \varphi) &= Y_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
 \text{grad} \left[a(r) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \right] & \\
 &= \frac{da(r)}{dr} X_{mk}(\vartheta, \varphi) + \frac{\sqrt{k(k+1)}}{r} a(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
 \text{rot} \left[xa(r) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) \right] &= \sqrt{k(k+1)} a(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
 \text{rot} \left[a(r) X_{mk}(\vartheta, \varphi) \right] &= \frac{\sqrt{k(k+1)}}{r} a(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
 \text{rot} \left[a(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi) \right] &= -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) a(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi), \\
 \text{rot} \left[a(r) Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right] &
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{k(k+1)}}{r} a(r) X_{mk}(\vartheta, \varphi) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) a(r) Y_{mk}(\vartheta, \varphi); \\
 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k e_3 a_k(r) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) A_{mk} &= \frac{1}{\sqrt{3}} a_1(r) A_{01} X_{00}(\vartheta, \varphi) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ \left[\sqrt{\frac{k^2 - m^2}{4k^2 - 1}} a_{k-1}(r) A_{mk-1} \right. \right. \\
 &+ \sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} a_{k+1}(r) A_{mk+1} \left. \right] X_{mk}(\vartheta, \varphi) \\
 &+ \sqrt{k(k+1)} \left[\frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2 - m^2}{4k^2 - 1}} a_{k-1}(r) A_{mk-1} \right. \\
 &- \frac{1}{k+1} \sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} a_{k+1}(r) A_{mk+1} \left. \right] Y_{mk}^{(\vartheta, \varphi)} \\
 &\left. + \frac{im}{\sqrt{k(k+1)}} a_k(r) A_{mk} Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right\}, \\
 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left[e_3 \times \text{grad} \right] a_k(r) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) A_{mk} &
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ -\frac{im}{r} a_k(r) \times A_{mk} X_{mk}(\vartheta, \varphi) \right. \\
&\quad - \frac{im}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) a_k(r) A_{mk} Y_{mk}(\vartheta, \varphi) \\
&\quad + \sqrt{k(k+1)} \left[\frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2 - m^2}{4k^2 - 1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k-1}{r} \right) a_{k-1}(r) A_{mk-1} \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k+2}{r} \right) a_{k+1}(r) A_{mk+1} \right] Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right\},
\end{aligned}$$

где $a(r)$, $a_k(r)$ – функции от $r = |x|$, $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, A_{mk} – постоянная, $e_3 = (0, 0, 1)^\top$, $a \cdot b$ и $a \times b$ – скалярное и векторное произведение векторов a и b , соответственно.

Пусть вектор $f(\vartheta, \varphi)$ удовлетворяет тем достаточным условиям гладкости, при которых его можно представить в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned}
f(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ \alpha_{mk} X_{mk}(\vartheta, \varphi) \right. \\
\left. + \sqrt{k(k+1)} \left[\beta_{mk} Y_{mk}(\vartheta, \varphi) + \gamma_{mk} Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right] \right\}, \quad (2.5)
\end{aligned}$$

где α_{mk} , $\sqrt{k(k+1)} \beta_{mk}$, $\sqrt{k(k+1)} \gamma_{mk}$ – коэффициенты Фурье.

Заметим, что в (2.5) и в аналогичных рядах в дальнейшем в слагаемых содержащих $Y_{mk}(\vartheta, \varphi)$ и $Z_{mk}(\vartheta, \varphi)$ индекс суммирования k изменяется от 1 до $+\infty$.

Справедливы следующие теоремы [1]

Теорема 2.1. Если $f(z) \in C^{(l)}(\partial\Omega_1)$, то коэффициенты α_{mk} , β_{mk} , γ_{mk} допускают следующие оценки

$$\alpha_{mk} = O(k^{-l}), \quad \beta_{mk} = O(k^{-l-1}), \quad \gamma_{mk} = O(k^{-l-1}), \quad l \leq 1. \quad (2.6)$$

Теорема 2.2. Векторы $X_{mk}(\vartheta, \varphi)$, $Y_{mk}(\vartheta, \varphi)$, $Z_{mk}(\vartheta, \varphi)$ допускают следующие оценки при любом $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
|X_{mk}(\vartheta, \varphi)| &\leq \sqrt{\frac{2k+1}{4\Pi}}, \quad k \geq 0, \\
|Y_{mk}(\vartheta, \varphi)| &< \sqrt{\frac{2k(k+1)}{2k+1}}, \quad k \geq 1, \\
|Z_{mk}(\vartheta, \varphi)| &< \sqrt{\frac{2k(k+1)}{2k+1}}, \quad k \geq 1.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Кроме того известно, что [10]

$$|Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi)| \leq \sqrt{\frac{2k+1}{4\Pi}}, \quad k \geq 0. \quad (2.8)$$

Пусть $\partial\Omega_j$, $j = 1, 2$, – сферическая поверхность, с центром O_j и радиусом R_j . Обозначим через Ω_j , $j = 1, 2$, шар, ограниченный поверхностью $\partial\Omega_j$. Будем считать, что $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Предположим, что оси координатных систем $O_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$, $j = 1, 2$, параллельны и одинаково ориентированы. Обозначим через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$ и $(r_j, \vartheta_j, \varphi_j)$, соответственно, декартовы и сферические координаты точки x относительно координатных систем $O_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$, $j = 1, 2$. Сферические координаты точки O_2 относительно системы $O_1 x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$ обозначим через $(d, \vartheta_0, \varphi_0)$.

Поскольку оси координатных систем параллельны и одинаково ориентированы, то справедливо следующее:

$$x^{(1)} = x^{(2)} + de_0, \quad (2.9)$$

где $e_0 = (\cos \varphi_0 \sin \vartheta_0, \sin \varphi_0 \sin \vartheta_0, \cos \vartheta_0)^\top$.

Формула преобразования гармоничных функций при переходе к новому началу координат имеет вид [4]

$$r_q^{-k-1} Y_k^{(m)}(\vartheta_q, \varphi_q) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=-p}^p G_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0, \varphi_0) r_j^p Y_p^{(s)}(\vartheta_j, \varphi_j), \quad (2.10)$$

$$q \neq j = 1, 2, \quad r_j < d,$$

где

$$G_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0, \varphi_0) = (-1)^s \left[(-1)^p \delta_{1q} + (-1)^k \delta_{2q} \right] d^{-k-p-1}$$

$$\times \left[\frac{4\Pi(2k+1)(k+p+m-s)!(k+p-m+s)!}{(2p+1)(2k+2p+1)(k+m)!(k-m)!(p+s)!(p-s)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times Y_{k+p}^{(m-s)}(\vartheta_0, \varphi_0), \quad (2.11)$$

δ_{jq} – символ Кронекера, $Y_k^{(m)}(\vartheta_q, \varphi_q)$ имеет вид (2.2).

Если формулах (2.9)–(2.11) допустим, что $\vartheta_0 = 0$ и учтем равенство

$$Y_{k+p}^{(m-s)}(0, \varphi_0) = \begin{cases} \left(\frac{2k+2p+1}{4\Pi} \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{где } m = s, \\ 0, & \text{где } m \neq s, \end{cases}$$

то получим

$$x^{(1)} = x^{(2)} + de_3, \quad (2.12)$$

$$r_2^{-k-1}Y_k^{(m)}(\vartheta_2, \varphi_2) = \sum_{p=|m|}^{\infty} G_{pk}^{(m)} r_1^p Y_p^{(m)}(\vartheta_1, \varphi_1), \quad r_1 < d, \quad (2.13)$$

где $e_3 = (0, 0, 1)^\top$,

$$G_{pk}^{(m)} := G_{pq,2}^{(m,m)}(0, \varphi_0) = \frac{(-1)^{k+m}(k+p)!\sqrt{2k+1}}{d^{k+p+1}[(2p+1)(k+m)!(k-m)!(p+m)!(p-m)!]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.14)$$

Если равенство (2.13) умножим на $r_2^2 = r_1^2 + d^2 - 2dr_1 \cos \vartheta_1$ и используем рекуррентное соотношение полиномов Лежандра [4], [10]

$$\cos \vartheta_1 P_p^{(m)}(\cos \vartheta_1) = \frac{1}{2p+1} \left[(p-m+1)P_{p+1}^{(m)}(\cos \vartheta_1) + (p+m)P_{p-1}^{(m)}(\cos \vartheta_1) \right],$$

то получим

$$r_2^{-k+1}Y_k^{(m)}(\vartheta_2, \varphi_2) = \sum_{p=|m|}^{\infty} \left[a_{pk}^{(m)} r_1^{p+2} + b_{pk}^{(m)} r_1^p \right] Y_p^{(m)}(\vartheta_1, \varphi_1), \quad (2.15)$$

где

$$a_{pk}^{(m)} = G_{pk}^{(m)} - 2d \sqrt{\frac{(p+1)^2 - m^2}{(2p+1)(2p+3)}} G_{p+1k}^{(m)}, \quad (2.16)$$

$$b_{pk}^{(m)} = d^2 G_{pk}^{(m)} - 2d \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{4p^2 - 1}} G_{p-1k}^{(m)}.$$

Если в выражении (2.1) векторов $X_{mk}(\vartheta, \varphi)$, $Y_{mk}(\vartheta, \varphi)$, $Z_{mk}(\vartheta, \varphi)$ учтем, что [4]

$$Y_k^{(m)}(\pi - \vartheta, \varphi) = (-1)^{k-m} Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad (2.17)$$

то получим

$$\begin{aligned} \left[X_{mk}(\pi - \vartheta, \varphi) \right]_j &= (-1)^{k-m} \left[X_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]_j, \quad j = 1, 2, \\ \left[X_{mk}(\pi - \vartheta, \varphi) \right]_3 &= (-1)^{k-m+1} \left[X_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]_3, \\ \left[Y_{mk}(\pi - \vartheta, \varphi) \right]_j &= (-1)^{k-m} \left[Y_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]_j, \quad j = 1, 2, \\ \left[Y_{mk}(\pi - \vartheta, \varphi) \right]_3 &= (-1)^{k-m+1} \left[Y_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]_3, \\ \left[Z_{mk}(\pi - \vartheta, \varphi) \right]_j &= (-1)^{k-m+1} \left[Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]_j, \quad j = 1, 2, \\ \left[Z_{mk}(\pi - \vartheta, \varphi) \right]_3 &= (-1)^{k-m} \left[Z_{mk}(\vartheta, \varphi) \right]_3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Справедливо следующая теорема [9]

Теорема 2.3. Для того, чтобы вектор $U = (u, p)^\top$ являлся решением системы дифференциальных уравнений (1.1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \text{grad } \Phi_1(x) + \text{grad } r^2 \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \Phi_2(x) \\ &\quad - 2x \left(2r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \Phi_2(x) + \text{rot}[x \Phi_3(x)], \\ p(x) &= 2\mu \sum_{j=1}^2 \left(2r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) \Phi_2(x), \end{aligned}$$

где

$$\Delta \Phi_j(x) = 0, \quad r = |x|, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad r \frac{\partial}{\partial r} = x \cdot \text{grad}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Справедлива следующая лемма [3]

Лемма 2.4. Если $0 < a = \text{const} < 1$, $c = \text{const} > 0$, m и k натуральные числа, то неравенство $k^m a^k < c$ справедливо для всякого $k > N = \max \{2, [4a^{2/m} c^{-1/m} (1 - a^{1/m})^{-2}]\}$.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Если в формуле (1.7) учтем, что на границе $\partial\Omega$ орт нормали имеет вид $n(x) = e_3 = (0, 0, 1)^\top$, то получим

$$\begin{aligned} \left[T(\partial, n)U(x) \right]_1 &= 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \\ \left[T(\partial, n)U(x) \right]_2 &= 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \\ \left[T(\partial, n)U(x) \right]_3 &= 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - p(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

С использованием формулы (3.1) получаем, что граничные условия (1.2) и (1.3) эквивалентны следующим условиям:

$$[u_j(z)]^+ = 0, \quad [p(z)]^+ = 0, \quad j = 1, 2, \quad z \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

или

$$[\text{rot } u(z)]_j^+ = 0, \quad [u_3(z)]^+ = 0, \quad j = 1, 2, \quad z \in \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Решение задачи $(I \cdot I)^- - II \cdot II)^-$ будем искать в виде

$$u(x) = \sum_{j=1}^2 \left[\text{grad } \Phi_1^{(j)}(x^{(j)}) + \text{grad } r_j^2 \left(r_j \frac{\partial}{\partial r_j} + 3 \right) \Phi_2^{(j)}(x^{(j)}) \right]$$

$$-2x^{(j)}\left(2r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+3\right)\Phi_2^{(j)}(x^{(j)})+\operatorname{rot}\left(x^{(j)}\Phi_3^{(j)}(x^{(j)})\right)\Big], \quad (3.4)$$

$$p(x)=2\mu\sum_{j=1}^2\left(2r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+3\right)\left(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+1\right)\Phi_2^{(j)}(x^{(j)}). \quad (3.5)$$

где

$$\Delta\Phi_l^{(j)}(x^{(j)})=0, \quad r_j=|x^{(j)}|, \quad r_j\frac{\partial}{\partial r_j}=x^{(j)}\cdot\operatorname{grad}, \quad l=1,2,3, \quad j=1,2,$$

Гармонические функции $\Phi_l^{(j)}(x^{(j)})$, $j=1,2$, $l=1,2,3$, будем искать в виде [10]

$$\Phi_l^{(j)}(x^{(j)})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^k\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}Y_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)A_{mk}^{(j,l)}, \quad (3.6)$$

$$j=1,2, \quad l=1,2,3,$$

где $A_{mk}^{(j,l)}$ – искомые постоянные.

От функции $\Phi_l^{(1)}(x^{(1)})$, $l=2,3$, будем требовать, что

$$\int_{\partial\Omega'}\Phi_l^{(1)}(x^{(1)})ds=0, \quad l=2,3, \quad (3.7)$$

где $\partial\Omega'$ сфера с центром в начале координат O_1 и радиусом R' ($R_1 < R' < d/2$).

Внеся значения функции $\Phi_l^{(1)}(x^{(1)})$, $l=2,3$, из (3.6) в (3.7), получим $A_{00}^{(1,l)}=0$, $l=2,3$.

Если значения функции $\Phi_l^{(j)}(x^{(j)})$, $j=1,2$, из (3.6) внесем в (3.4) и (3.5) и учтем формулы (2.3), получим

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^k\sum_{j=1}^2\left\{\left[-\frac{k+1}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+2}A_{mk}^{(j,1)}\right.\right.$$

$$\left.-k(k+1)R_1\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^kA_{mk}^{(j,2)}\right]X_{mk}(\vartheta_j,\varphi_1)$$

$$+\sqrt{k(k+1)}\left[\frac{1}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+2}A_{mk}^{(j,1)}+(k-2)R_1\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^kA_{mk}^{(j,2)}\right]Y_{mk}(\vartheta_j,\varphi_1)$$

$$\left.+\sqrt{k(k+1)}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}A_{mk}^{(j,3)}Z_{mk}(\vartheta_j,\varphi_1)\right\}, \quad (3.8)$$

$$p(x)=2\mu\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^k\sum_{j=1}^2k(2k-1)R_1\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}A_{mk}^{(j,2)}Y_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_1). \quad (3.9)$$

Здесь учтено, что $\varphi_2 = \varphi_1$.

Учитывая формулы (2.3), из (3.8) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u(x) = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1}{r_j} \right)^{k+2} \right. \\ & \times \left[k(k+1)X_{mk}(\vartheta_j, \varphi_1) - kY_{mk}(\vartheta_j, \varphi_1) \right] A_{mk}^{(j,3)} \\ & \left. - 2(2k-1)\sqrt{k(k+1)} \left(\frac{R_1}{r_j} \right)^{k+1} A_{mk}^{(j,2)} Z_{mk}(\vartheta_j, \varphi_1) \right\}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Переходя к пределу в формулах (3.8)–(3.10), когда $x_3^{(1)} \rightarrow d/2$ и учитывая, что в плоскости $\partial\Omega$, $r_2 = r_1$, $\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$, а также формулы (2.17) и (2.18), заключаем, что граничные условия (3.2) выполняются если коэффициенты $A_{mk}^{(2,l)}$ выберем таким образом

$$A_{mk}^{(2,l)} = (-1)^{k-m+1} A_{mk}^{(1,l)}, \quad l = 1, 2, \quad A_{mk}^{(2,3)} = (-1)^{k-m} A_{mk}^{1,3} \quad (3.11)$$

а граничные условия (3.3) удовлетворяются если

$$A_{mk}^{(2,l)} = (-1)^{k-m} A_{mk}^{(1,l)}, \quad l = 1, 2, \quad A_{mk}^{(2,3)} = (-1)^{k-m+1} A_{mk}^{1,3} \quad (3.12)$$

Решим задачу $(I-I)^-$, поскольку остальные задачи решаются аналогично.

Для удовлетворения граничных условий запишем функции $\Phi_l^{(2)}(x^{(2)})$, $l = 1, 3$, и $r_2^2(r_2\partial/\partial r_2 + 3)\Phi_2^{(2)}(x^{(2)})$ в системе $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ что возможно с использованием формул сложения (2.13) и (2.15)

$$\begin{aligned} \Phi_l^{(2)}(x^{(2)}) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k r_1^k Y_k^{(m)}(\vartheta_j, \varphi_1) B_{mk}^{(l)}, \quad l = 1, 3, \\ & r_2^2 \left(r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} + 3 \right) \Phi_2^{(2)}(x^{(2)}) \\ = & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k [r_1^{k+2} B_{mk}^{(2)} + r_1^k B_{mk}^{(4)}] Y_k^{(m)}(\vartheta_j, \varphi_1), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где учитывая (3.11) получаем

$$\begin{aligned}
B_{mk}^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p-m+1} R_1^{p+1} G_{kp}^{(m)} A_{mp}^{(1,1)}, \\
B_{mk}^{(3)} &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-m} R_1^{p+1} G_{kp}^{(m)} A_{mp}^{(1,3)}, \\
B_{mk}^{(2)} &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-m+1} (p-2) a_{kp}^{(m)} R_1^{p+1} A_{mp}^{(1,2)}, \\
B_{mk}^{(4)} &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-m+1} (p-2) b_{kp}^{(m)} R_1^{p+1} A_{mp}^{(1,2)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}
\left(2r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} + 3\right) \Phi_2^{(2)}(x^{(2)}) &= - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k r_1^k Y_k^{(m)}(\vartheta_j, \varphi_1) B_{mk}^{(5)}, \\
\left(2r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} + 3\right) \left(r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} + 1\right) \Phi_2^{(2)}(x^{(2)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k r_1^k Y_k^{(m)}(\vartheta_j, \varphi_1) B_{mk}^{(6)},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{mk}^{(5)} &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-m+1} (2p-1) R_1^{p+1} G_{kp}^{(m)} A_{mp}^{(1,2)}, \\
B_{mk}^{(6)} &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-m+1} p(2p-1) R_1^{p+1} G_{kp}^{(m)} A_{mp}^{(1,2)}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Если значения гармонических функций $\Phi_l^{(j)}(x^{(j)})$, $j = 1, 2$, $l = 1, 2, 3$, из (3.6) внесем в (3.4), (3.5) и учтем формулы (2.3), (2.4), (3.13) и (3.15), то получим

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ u_{mk}(r_1) X_{mk}(\vartheta_1, \varphi_1) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{k(k+1)} [v_{mk}(r_1) Y_{mk}(\vartheta_1, \varphi_1) + w_{mk}(r_1) Z_{mk}(\vartheta_1, \varphi_1)] \right\}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$p(x) = 2\mu \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left[k(2k-1) \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+1} A_{mk}^{(1,2)} + r_1^k B_{mk}^{(6)} \right] Y_k^{(m)}(\vartheta_1, \varphi_1), \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_{mk}(r_1) &= -\frac{k+1}{R_1} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+2} A_{mk}^{(1,1)} - k(k+1)R_1 \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k A_{mk}^{(1,2)} \\
 &\quad + r_1^{k+1} l_{mk}^{(1)} + r_1^{k-1} l_{mk}^{(2)}, \\
 v_{mk}(r_1) &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+2} A_{mk}^{(1,1)} + (k-2)R_1 \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^k A_{mk}^{(1,2)} \\
 &\quad + r_1^{k+1} l_{mk}^{(3)} + \frac{1}{k} r_1^{k-1} l_{mk}^{(2)}, \\
 w_{mk}(r_1) &= \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+1} A_{mk}^{(1,3)} + r_1^k l_{mk}^{(4)}.
 \end{aligned}$$

Здесь величины $L_{mk}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, имеют вид

$$\begin{aligned}
 l_{mk}^{(1)} &= -(k+2)B_{mk}^{(2)} + 2B_{mk}^{(5)} - 2d\sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} B_{mk+1}^{(5)}, \\
 l_{mk}^{(2)} &= kB_m^{(1)} - kB_{mk}^{(4)} - imdB_{mk}^{(3)} - 2d\sqrt{\frac{k^2 - m^2}{4k^2 - 1}} B_{mk-1}^{(5)}, \\
 l_{mk}^{(3)} &= -B_{mk}^{(2)} + \frac{2d}{k+1}\sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} B_{mk+1}^{(5)}, \\
 l_{mk}^{(4)} &= B_{mk}^{(3)} - \frac{2imd}{k(k+1)} B_{mk}^{(5)} - \frac{d(2k+3)}{k+1}\sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} B_{mk+1}^{(5)}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Вычисляя вектор напряжения $T(\partial, n)U(x)$ из (3.17), (3.18) и учитывая формулы (2.3), получим

$$\begin{aligned}
 T(\partial, n)U(x) &= 2\mu \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \left\{ a_{mk}(r_1)X_{mk}(\vartheta_1, \varphi_1) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{k(k+1)} \left[b_{mk}(r_1)Y_{mk}(\vartheta_1, \varphi_1) + c_{mk}(r_1)Z_{mk}(\vartheta_1, \varphi_1) \right] \right\}, \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{mk}(r_1) &= \frac{k(k+1)}{R_1^2} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+3} A_{mk}^{(1,1)} + k(k^2 - k + 1) \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+1} A_{mk}^{(1,2)} \\
 &\quad + r_1^k \left[(k+1)l_{mk}^{(1)} - B_{mk}^{(6)} \right] + (k-1)r_1^{k-2} l_{mk}^{(1)}, \quad k \geq 0, \\
 b_{mk}(r_1) &= -\frac{k+2}{R_1^2} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+3} A_{mk}^{(1,1)} - (k^2 - 1) \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+1} A_{mk}^{(1,1)} \\
 &\quad + r_1^k \left[\frac{k}{2} l_{mk}^{(3)} + \frac{1}{2} l_{mk}^{(1)} \right] + \frac{k-1}{k} r_1^{k-2} l_{mk}^{(2)}, \quad k \geq 1,
 \end{aligned}$$

$$c_{mk}(r_1) = -\frac{k+2}{2R_1} \left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+2} A_{mk}^{(1,3)} + \frac{k-1}{2} r_1^{k-1} l_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 1.$$

Пусть вектор-функция $f(z)$ разлагается в ряды (2.5). Если обеих сторонах равенства (3.17) перейдем к пределу, когда $x \rightarrow z \in \partial\Omega_1$ ($r_1 \rightarrow R_1$) и учтем граничную условию (1.4), а также равенство (2.5), то для неизвестных постоянных $A_{mk}^{(1,l)}$, $l = 1, 2, 3$, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$-\frac{1}{R_1} A_{00}^{(1,1)} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} R_1^{p+2} \left[-2(p-2)a_{0p}^{(0)} + 2(2p-1)G_{0p}^{(0)} - \frac{2d(2p-1)}{\sqrt{3}} G_{1p}^{(0)} \right] A_{0p}^{(1,2)} = \alpha_{00}; \quad (3.21)$$

$$-\frac{k+1}{R_1} A_{mk}^{(1,1)} - k(k+1)R_1 A_{mk}^{(1,2)} = x_{mk}^{(1)}, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{R_1} A_{mk}^{(1,1)} + (k-2)R_1 A_{mk}^{(1,2)} = x_{mk}^{(2)},$$

$$A_{mk}^{(1,3)} = x_{mk}^{(3)}, \quad k \geq 1,$$

где

$$x_{mk}^{(1)} = \alpha_{mk} - R_1^{k+1} l_{mk}^{(1)} - R_1^{k-1} l_{mk}^{(2)},$$

$$x_{mk}^{(2)} = \beta_{mk} - R_1^{k+1} l_{mk}^{(3)} - \frac{1}{k} R_1^{k-1} l_{mk}^{(2)}, \quad (3.23)$$

$$x_{mk}^{(3)} = \gamma_{mk} - R_1^k l_{mk}^{(4)}, \quad k \geq 1.$$

Решение системы (3.22) имеет вид

$$A_{mk}^{(1,1)} = \frac{R_1}{2(k+1)} \left[(k-2)X_{mk}^{(1)} + k(k+1)x_{mk}^{(2)} \right],$$

$$A_{mk}^{(1,2)} = \frac{-1}{2R_1(k+1)} \left[x_{mk}^{(1)} + (k+1)x_{mk}^{(2)} \right], \quad (3.24)$$

$$A_{mk}^{(1,3)} = x_{mk}^{(3)}.$$

Из (3.21) получаем

$$A_{00}^{(1,1)} = -R_1 \alpha_{00} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} R_1^{p+3} \times \left[-2(p-2)a_{0p}^{(0)} + 2(2p-1)G_{0p}^{(0)} - \frac{2d(2p-1)}{\sqrt{3}} G_{1p}^{(0)} \right] A_{0p}^{(1,2)}. \quad (3.25)$$

Если значения $x_{mk}^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$, из (3.23) внесем в (3.24) и учтем формулы (3.14), (3.16), (3.19) и (3.25), то искомым постоянных $A_{mk}^{(1,l)}$,

$l = 1, 2, 3$, получаем следующую бесконечную систему алгебраических уравнений

$$A_{mk} = \tilde{\alpha}_{mk} + \sum_{p=1}^{\infty} L_{mpk} A_{mp}, \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned} A_{mk} &= (A_{mk}^{(1,1)}, A_{mk}^{(1,2)}, A_{mk}^{(1,3)})^T, \quad \tilde{\alpha}_{mk} = (\alpha_{mk}^{(1)}, \beta_{mk}^{(1)}, \gamma_{mk})^T, \\ \alpha_{mk}^{(1)} &= \frac{R_1}{2(k+1)} \left[(k-2)\alpha_{mk} + k(k+1)\beta_{mk} \right. \\ &\quad \left. - (-1)^m k(2k-1)R_1^{k+1} G_{k0}^{(m)} \alpha_{00} \right], \\ \beta_{mk}^{(1)} &= \frac{-1}{2(k+1)R_1} \left[\alpha_{mk} + (k+1)\beta_{mk} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m k(2k+1)R_1^{k+1} G_{k0}^{(m)} \alpha_{00} \right], \\ L_{mpk} &= [L_{mpk}^{(lj)}]_{3 \times 3}, \quad (3.27) \\ L_{mpk}^{(11)} &= (-1)^{p-m} \frac{k(2k-1)}{2(k+1)} R_1^{k+p+1} G_{kp}^{(m)}, \\ L_{mpk}^{(12)} &= (-1)^{p-m} \frac{1}{2(k+1)} R_1^{k+p+1} \left\{ - (p-2)(2k^2 + k - 4)R_1^2 a_{kp}^{(m)} \right. \\ &\quad \left. - k(2k-1)(p-2)b_{kp}^{(m)} + 2(k-2)(2p-1)R_1^2 G_{kp}^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + 4d \sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} (2p-1)R_1^2 G_{k+1p}^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + 2k(2k-1)R_1^3 G_{k0}^{(0)} \left[(p-2)a_{0p}^{(0)} - (2p-1)G_{0p}^{(0)} + \frac{d(2p-1)}{\sqrt{3}} G_{1p}^{(0)} \right] \delta_{0m} \right\}, \\ L_{mpk}^{(13)} &= (-1)^{p-m} \frac{imd(2k-1)}{2(k+1)} R_1^{k+p+1} G_{kp}^{(m)}, \\ L_{mpk}^{(21)} &= (-1)^{p-m+1} \frac{2k+1}{2(k+1)} R_1^{k+p-1} G_{kp}^{(m)}, \\ L_{mpk}^{(22)} &= \frac{(-1)^{p-m+1}}{2(k+1)} R_1^{k+p-1} \left\{ - (p-2)(2k+3)R_1^2 a_{kp}^{(m)} \right. \\ &\quad \left. - (p-2)(2k+1)b_{kp}^{(m)} + 2(2p-1)R_1^2 G_{kp}^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + 2(2k+1)R_1^3 G_{k0}^{(0)} \left[(p-2)a_{0p}^{(0)} - (2p-1)G_{0p}^{(0)} + \frac{d(2p-1)}{\sqrt{3}} G_{1p}^{(0)} \right] \delta_{0m} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{mpk}^{(23)} &= (-1)^{p-m+1} \frac{imd(2k+1)}{2k(k+1)} R_1^{k+p-1} G_{kp}^{(m)}, \quad L_{mpk}^{(31)} = 0, \\
L_{mpk}^{(32)} &= (-1)^{p-m+1} \frac{2imd(2p-1)}{k(k+1)} R_1^{k+p+1} G_{kp}^{(m)}, \\
L_{mpk}^{(33)} &= (-1)^{p-m+1} R_1^{k+p+1} \left[G_{kp}^{(m)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{d(2k+3)}{k+1} \sqrt{\frac{(k+1)^2 - m^2}{(2k+1)(2k+3)}} G_{k+1}^{(m)} \right].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Если в равенствах (2.14) и (2.16) учтем легко выводимое неравенство $(k+m)!(k-m)! \geq (k!)^2$, то получим

$$\begin{aligned}
|G_{kp}^{(m)}| &\leq \frac{1}{d^{p+k+1}} \sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}} \frac{(k+p)!}{k!p!}, \\
|a_{kp}^{(m)}| &< \frac{2}{d^{p+k+1}} \sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}} \frac{(k+p+1)!}{p!(k+1)!}, \\
|b_{kp}^{(m)}| &< \frac{2}{d^{p+k-1}} \sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}} \frac{(k+p)!}{k!p!}.
\end{aligned}$$

С учетом этих неравенств из (3.28) получаем

$$|L_{mpk}^{(lj)}| < \alpha(p+1) \left(\frac{R_1}{d} \right)^{k+p-1} \frac{(k+p+2)!}{k!p!}, \quad p \geq 1, \quad k \geq 1, \tag{3.29}$$

где $\alpha > 0$ – постоянная независимая от k и p .

Покажем, что система (3.26) является квазирегулярным, т.е. надо доказать, что условие регулярности выполнено лишь во всех строках начиная с некоторой, т.е.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| < 1, \quad k = N+1, N+2, \dots, \quad l = 1, 2, 3, \tag{3.30}$$

кроме того

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, 3, \tag{3.31}$$

$$|\tilde{\alpha}_{mk,l}| < M \left[1 - \sum_{p=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| \right], \tag{3.32}$$

$$k = N+1, N+2, \dots, N \quad l = 1, 2, 3,$$

где $M > 0$ – положительная постоянная.

Докажем сначала существование такого натурального числа N , для которого при $k > N$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| < 1 - \rho, \quad k = N + 1, N + 2, \dots, \quad l = 1, 2, 3, \quad (3.33)$$

где $0 < \varepsilon' < \rho < \varepsilon < 1$.

Учитывая неравенство (3.29) и тождеством

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!p!} t^p = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{k+1}, \quad 0 < t < 1,$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| &< 3\alpha(k+2)^3 \left(\frac{R_1}{d} \right)^{k-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+k+3)!}{p!(k+3)!} \left(\frac{R_1}{d} \right)^p \\ &< \sigma k^3 \left(\frac{R_1}{d-R_1} \right)^k, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $\sigma > 0$ – постоянная независимая от k .

Согласно леммы 2.4 получаем, что неравенство

$$\sigma k^3 \left(\frac{R_1}{d-R_1} \right)^k < 1 - \rho \quad (3.35)$$

справедливо для всякого $k > N$, где

$$N = \max \left\{ 2 \left[4 \sqrt[3]{\sigma R_1^2 (1-\rho)^{\frac{1}{3}}} (\sqrt[3]{d-R_1} - \sqrt[3]{R_1})^{-2} \right] \right\}.$$

Итак, когда $k > N$ неравенство (3.25) доказано, из которого вытекают справедливость неравенства (3.30).

Пусть $k = 1, 2, \dots, N$, тогда из (3.34) вытекает, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| < \sigma k^3 \leq \sigma N^3 < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, 3;$$

этим справедливость неравенства (3.31) доказана.

Выберем постоянную M таким образом

$$M = \frac{1}{\varepsilon'} \max |\tilde{\alpha}_{mk,l}|, \quad k \geq 1, \quad l = 1, 2, 3. \quad (3.36)$$

Отсюда с учетом (3.33) следует, что

$$|\tilde{\alpha}_{mk,l}| \leq \max |\tilde{\alpha}_{mk,l}| = \varepsilon' M < M\rho < M \left[1 - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| \right]$$

$$< M \left[1 - \sum_{p=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 |L_{mpk}^{(lj)}| \right], \quad k = N+1, N+2, \dots, \quad l = 1, 2, 3$$

Этим неравенство (3.32) доказано.

Итак, доказано, что система (3.26) является квазирегулярной. Известно, что вопрос о существовании решения такой системы осуществляется применением метода редукции.

Из системы (3.23) следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$|x_{mk}^{(1)}| \sim |\alpha_{mk}|, \quad |x_{mk}^{(2)}| \sim |\beta_{mk}|, \quad |x_{mk}^{(3)}| \sim |\gamma_{mk}|.$$

Ряды, входящие в формулы (3.17), (3.18), (3.20) и содержащие постоянные $B_{mk}^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, 6$, сходятся независимо от того, $x \in \Omega^-$ или $x \in \partial\Omega$ или $x \in \partial\Omega_1$. Регулярность вектора $u(x)$ и функции $p(x)$ зависит от сходимости рядов, входящих в формулы (3.17), (3.18), (3.20), которые содержат постоянные $A_{mk}^{(1,j)}$, $j = 1, 2, 3$. Если $x \in \Omega^- \cup \partial\Omega$, то $r_1 > R_1$ и упомянутые выше ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\Omega^- \cup \partial\Omega$. Если $x \in \partial\Omega_1$, то, учитывая оценки (2.7) и (2.8), для сходимости рядов (3.17), (3.18) и (3.20) достаточно, чтобы коэффициенты Фурье α_{mk} , β_{mk} , γ_{mk} допускали следующие оценки при $k \rightarrow \infty$

$$\alpha_{mk} = O(K^{-4}) \quad \beta_{mk} = O(K^{-5}) \quad \gamma_{mk} = O(K^{-5}). \quad (3.37)$$

Из теоремы 2.1 следует, что коэффициенты α_{mk} , β_{mk} , γ_{mk} допускают оценки (3.27), если вектор-функция $f(z) \in C^4(\partial\Omega_1)$.

Заметим, что поскольку коэффициенты α_{mk} , β_{mk} , γ_{mk} стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, то всегда можно выбрать постоянную $M > 0$, таким образом, чтобы выполнялось равенство (3.36).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giorgashvili L., Solution of the basic boundary value problems of stationary thermoelastic oscillations for domains bounded by spherical surfaces. *Georgian Math. J.* 4 (1997), No. 5, 421–438.
2. Giorgashvili L.,
3. Гиоргашвили Л., Схвитаридзе К., Движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной области, ограниченной двумя сферическими поверхностями. *Труды фак-та вычислительной матем. и кибер. МГУ, Москва*, 2002, 14–29.
4. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций. *Изд-во ИЛ, Москва*, 1952.
5. Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. *Наука, Москва*, 1970.
6. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа. *Наука, Москва*, 1973.

7. Морс Ф. М., Фешбих Г., Методы теоретической физики. Т. 2, *Москва*, 1960.
8. Схвитаридзе К. М., Основные граничные задачи линеаризованного стационарного уравнения Навье–Стокса для шара. *Международный евучный журнал “Проблемы прикладной механики”*, *Тбилиси*, 2001, № 4(5), 67–73.
9. Схвитаридзе К. М., Представление общего решения однородного уравнения Навье–Стокса. *Периодический науч. журнал “Интеллекти”*, *Тбилиси*, 2001, № 2(10), 17–20.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики. *Физматгиз, Москва*, 1966.

Грузинский технический университет
Департамент математики
ул. М. Костава 77, Тбилиси 0175
Грузия

Повышение конкурентоспособности отечественного аэрокосмического комплекса за счет совершенствования проведения аэродинамического эксперимента

Л. П. Клеева, И. В. Клеев

Сегодня отечественная экономика стремительно теряет свою конкурентоспособность на мировом рынке наукоемкой продукции. Если доля СССР в середине 80-х годов прошлого века составляла почти четверть, а доля России даже в 90-х годах превышала 10%, то в начале XXI века она с трудом достигает 7–8%. Конкурентоспособность экономики России на рынках наукоемкой продукции падает, и это особенно тревожно сегодня, когда развитые страны мира переходят к инновационной экономике.

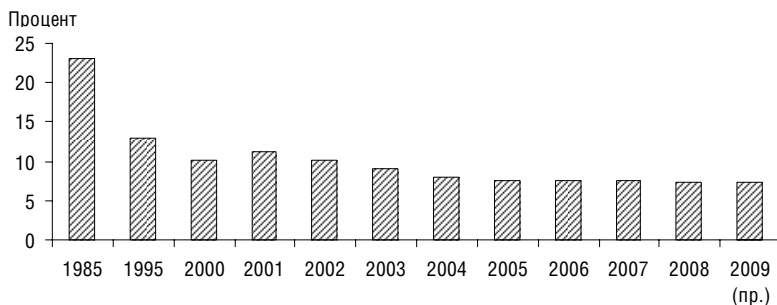


Рис. 1. Доля объема продаж наукоемкой научно-технической продукции, работ и услуг отечественной авиационной промышленности на мировом рынке наукоемкой научно-технической продукции.

В советское время одним из форпостов в международной торговле наукоемкой продукцией справедливо считался отечественный аэрокосмический комплекс. Однако трансформации современной экономики России в существенной мере изменили условия его работы. В новых экономических условиях важнейшим фактором кон-

курентоспособности создаваемой авиационной техники становятся не только ее аэродинамические характеристики, но и величина затрат на их разработку и создание, во многом определяющая соотношение цены и качества новой техники.

При разработке современной авиационной техники одной из важнейших компонент себестоимости её создания является экспериментальная составляющая, которая появляется как на этапе исследования и описания новых физических явлений, на основании которых ведется проектирование летательных аппаратов (ЛА), так и на этапе подтверждения характеристик создаваемых ЛА, а также проверки правильности произведенных в процессе создания ЛА расчетов и принятых гипотез. В связи с большой энергоёмкостью, высокой стоимостью электроэнергии и дороговизной экспериментальной установки (аэродинамические трубы, измерительное оборудование) проведение аэродинамического эксперимента представляет собой очень дорогостоящее мероприятие. Все это в высшей степени актуализирует проблему повышения эффективности трубного аэродинамического эксперимента в современных экономических условиях.

Важнейшим фактором повышения конкурентоспособности аэродинамического эксперимента является совершенствование средств измерений и производственных процессов при определении аэродинамических характеристик создаваемых ЛА, в качестве важнейшего средства измерения которых применяются многокомпонентные тензометрические весы. Тензовесы представляют собой прибор, выполненный из монолитного куска металла, реагирующий на внешнее силовое воздействие деформацией чувствительных элементов. При помощи тензорезисторов, установленных на них, деформации преобразуются в электрические сигналы, которые используются для измерения силового воздействия газового потока на исследуемый аппарат.

Современные тензометрические весы характеризуются высокой точностью измерений – 0,1-0,2 % измеряемой величины. В процессе эволюции тензометрических весов их разработчикам удалось добиться решения большого числа технических проблем и поднять точность измерений тензометрических весов до указанной величины.

В настоящий момент дальнейшему увеличению точности измерений мешает температурная погрешность, возникающая в тензовесах при изменении их температуры.

Температурная погрешность тензометрических весов состоит из двух составляющих – статической и динамической. Статическая составляющая температурной погрешности появляется при стационарном режиме работы тензовесов, когда температура всех их элементов изменяется одновременно без градиентов.

Причиной динамических температурных погрешностей являются температурные градиенты в конструкции весов, обусловленные тем, что весы практически никогда не прогреваются равномерно. Они вызваны:

- большой тепловой инерцией весов,
- наличием в их конструкции клиновидных элементов,
- потоками тепла, идущими от модели и державки,
- теплом, выделяемое тензорезисторами,
- изменением режимов испытаний и характеристик набегающего на модель и тензовесы потока во времени.

При экономико-математическом моделировании процессов, связанных с тепловой динамикой тензометрических весов, необходимо учитывать существование трех видов переноса тепла:

- 1) теплопроводность (кондукция) – процесс распространение тепловой энергии вследствие взаимодействия элементарных частиц (свободные электроны, ионы, атомы) вещества;
- 2) перемешивание (конвекция) – процесс переноса тепловой энергии путем перемешивания относительно больших масс вещества с различными температурами (жидкости, газы);
- 3) тепловое излучения (радиация) – процесс переноса энергии, выделившейся вследствие переходов атомов, молекул и других атомных систем из состояния с большей в состояние с меньшей энергией, причем переход этот осуществляется вследствие теплового движения атомов и молекул. Сам процесс переноса энергии происходит в виде электромагнитных волн через полностью или частично прозрачную для них среду.

Второй тип распространения тепла – конвекция (перемешивание) – имеет место в движущихся квазиплосных средах (жидкостях, газах, сыпучих средах, плазме). Относительно тепловой динамики тензовесов он присутствует только в процессах переноса тепла в газе (окружающей среде) вблизи тензовесов. Описание и ис-

следование таких процессов выходит за пределы настоящей работы, поэтому в ней для описания процесса теплообмена весов с окружающей средой используется коэффициент теплообмена, полученный экспериментальным путем.

Первый тип распространения тепла – теплопроводность (кондукция) – имеет место в твердых телах и неподвижных слоях жидкости и газа. Процесс распространения тепла по конструкции тензовесов (монокристаллическому куску стали) является одним из примеров кондукции.

Приведем определения некоторых необходимых понятий, с которыми мы будем работать:

1. *Тепловой поток* – поток внутренней энергии, самопроизвольно возникающий в вещественной среде с неоднородным температурным полем. Измеряется в $\frac{\text{ед.энергии}}{\text{ед.времени}}$;

2. *Теплоотдача* – процесс теплообмена (теплопереноса) между средами, разделенными отчетливой границей (например, твердая стенка – жидкость);

3. *Теплопередача* – процесс теплообмена между средами, разделенными некоторой перегородкой.

Для изучения тепловой динамики тензовесов необходимо уметь хорошо рассчитывать поля температур в конструкции весов, которые являются результатом получающихся вследствие распространения тепла по исследуемому прибору, описываемому уравнением теплопроводности.

В связи с громоздкостью аналитического решения уравнения теплопроводности, а также в связи со сложной и громоздкой формой тензовесов, имеет смысл использовать для моделирования распространения тепла по конструкции тензовесов метод электротепловой аналогии.

Известно, что распространение электрического тока в цепи и тепла по телу описывается одним уравнением – дифференциальным уравнением теплопроводности (или диффузии), которое записывается в следующем виде (для одномерного потока тепла):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где: t - время, x - координата, вдоль которой происходит распространение тепла, $T(x, t)$ - температура тела в точке x и в момент времени t , $a \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \right]$ - коэффициент температуропроводности, который равен

$$a = \frac{\lambda}{c\rho},$$

где λ - коэффициент теплопроводности $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right]$ (количество тепла, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, при перепаде температуры на единицу нормали, равному одному градусу), c - удельная теплоемкость материала, по которому распространяется тепло, $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}} \right]$, а ρ - его плотность $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$.

Так как все элементы тензовесов сделаны из стали, имеет смысл привести значения всех коэффициентов, которые будут использоваться ниже: теплопроводность стали $\lambda = 58,11 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, удельная теплоемкость $c = 460 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$, плотность $\rho = 7860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

В методе электротепловой аналогии температуре ставится в соответствие напряжение, энергии - заряд, теплопроводности - электропроводность и т. д.

Далее необходимо разбить конструкцию тензовесов на некоторое количество элементов (ячеек), каждый из которых обладает теплоемкостью и сопротивлением теплопередаче. Теплоемкость заменяется конденсатором, обладающим емкостью, а сопротивление теплопередаче - резистором. Эти элементы и составляют электрическую цепь, распределение напряжения по которой соответствует распределению температуры по исходной конструкции тензовесов. Т.е. процесс распространения тепла по телу моделируется распространением заряда по RC-цепочке.

Ёмкость конденсатора для каждой ячейки будет рассчитываться по формуле: $C = c\rho V$, где c - удельная теплоёмкость материала, ρ - плотность материала, V - объем ячейки.

Сопротивление резистора для такой же ячейки будет равно:

$R = \frac{l}{\lambda S}$, где λ - коэффициент теплопроводности, l - длина ячейки, S - площадь поперечного сечения ячейки.

Далее на основе законов Кирхгофа строится система дифференциальных уравнений для этой RC-цепи, которая решается численно с помощью математического программного комплекса Mathcad. Стоит отметить, что эта система дифференциальных уравнений 1-го порядка и количество их в системе равно количеству элементов (ячеек), на которые мы разбиваем конструкцию.

Прежде, чем перейти к следующему материалу, необходимо рассмотреть отличие приведенного выше метода электротеплового моделирования от решения уравнения теплопроводности методами вычислительной математики.

В отличие от разностных схем, приемлемая точность которых в основном достигается за счет уменьшения шага сетки, предлагаемый в настоящей работе метод основан на схожести аналитического решения уравнения теплопроводности и решения задачи пространства заряда по RC -цепочке.

Решение уравнения теплопроводности состоит из функций вида e^{-at} (см. [6],[11],[12]), а в RC - контуре величина заряда также описывается функцией $e^{-\frac{t}{RC}}$ (в обоих случаях t - это время).

Одинаковый общий вид решений этих двух задач позволяет нам при использовании метода электротепловой аналогии разбивать конструкцию на ячейки не бесконечно малого размера, а на удобные при составлении эквивалентной схемы ячейки. Ограниченное число ячеек также позволяет упростить систему уравнений и решать её на обычных персональных компьютерах.

В теплообмене тензометрических весов, находящихся в аэродинамической трубе реализуется граничное условие третьего рода к уравнению теплопроводности, которое характеризует закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой при постоянном потоке тепла (стационарное температурное поле). Если $T_{\text{пов}}$ - температура поверхности, а $T_{\text{ср}}$ - температура среды, то количество тепла, передаваемого в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду в про-

цессе охлаждения ($T_{\text{пов}} > T_{\text{ср}}$), прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой:

$$q_{\text{п}} = \alpha(T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}),$$

где $\alpha \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}} \right]$ - коэффициент теплообмена. Он численно равен количеству тепла, отдаваемого единицей площади поверхности при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой в 1К. Аналогичные рассуждения можно привести и для нагревания поверхности ($T_{\text{пов}} < T_{\text{ср}}$).

Граничные условия третьего рода могут быть использованы при рассмотрении нагревания или охлаждения тела лучеиспусканием. В этом случае коэффициент теплообмена состоит из двух слагаемых:

$$\alpha = \alpha_{\text{к}} + \alpha(T),$$

где $\alpha_{\text{к}}$ - коэффициент конвективного теплообмена, а $\alpha(T)$ - коэффициент лучистого теплообмена. В данной работе коэффициент теплообмена для поверхности тензовесов будет в каждом конкретном случае численно задаваться, причем его значение будет вычисляться из обобщения экспериментальных данных.

При моделировании уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода в эквивалентной электрической схеме появляется новый элемент - коэффициент сопротивления теплообмену R_{T} . Определим его. Пусть граница между телом и средой имеет некую ненулевую толщину. Тогда у материала этой границы была бы теплопроводность $\lambda_{\text{тр}}$. Сопротивление теплопередаче мы бы тогда записали следующим образом

$$R_{\text{T}} = \frac{l}{\lambda_{\text{тр}} S},$$

где l - толщина границы, S - площадь границы. Согласно определению, коэффициент теплопроводности - это количество тепла, переносимое единицей сечения при перепаде температуры в 1К на

единицу нормали (в данном случае толщины границы), а коэффициент теплообмена – сколько тепла переносит единица сечения границы при перепаде температур в ΔT на всю толщину границы. Следовательно,

$$\alpha = \frac{\lambda_{\text{гр}}}{l} \Rightarrow R_{\text{T}} = \frac{1}{\alpha S}$$

Возникает вопрос: каким должен быть выбран размер одной ячейки, на которые мы разбиваем конструкцию? Очевидно, что чем меньше будет размер таких ячеек, тем лучше будут результаты моделирования соответствовать аналитическому решению уравнения теплопроводности, но, в тоже время, тем на бóльшее число ячеек придется разбивать конструкцию и, следовательно, больше и сложнее будет система уравнений.

Для примера приведем в таблице 1. значения длин 117 ячеек для тензометрических весов В6-706.

Таб. 1. Длины ячеек при разбиении тензовесов В6-706

Номера ячеек i	Длина ячеек l_i (мм.)
1; 65	0,9
2; 4; 6; 8; 10; 34; 36; 38; 40; 42; 66; 68; 70; 72; 74; 98; 100; 102; 104; 106; 54; 55; 56; 57; 58; 59; 60; 61; 62; 63	1,2
3; 5; 7; 9; 35; 37; 39; 41; 67; 69; 71; 73	1,8
11; 33; 75; 97	3,3
12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 76; 77; 78; 79; 80; 81; 82; 83; 84; 85; 87; 88; 88; 89; 90; 91; 92; 93; 94; 95; 96	2
22; 86; 64	2,2
43; 107	2,4
44; 45; 46; 47; 48; 49; 50; 51; 52; 53; 108; 109; 110; 111; 112; 113; 114; 115; 116; 117	1,5

Для построения эквивалентной электрической схемы необходимо знать о каждой ячейки следующую информацию: объем, площадь поперечного сечения, площадь поверхности.

Площадь поверхности n -ой ячейки записывается следующим образом:

$$S_{\text{нов}}(n) = \begin{cases} l_n \left[\left(\sum_{i=1}^n l_n - \frac{1}{2} l_n \right) 2 \tan \beta + \frac{K}{\cos \beta} + (P - K) + 2\gamma R \right] & \text{if } 0 < n < 44 \\ 2\pi R l_n & \text{if } 43 < n < 54 \\ 4H \left(l_n + \frac{P - K}{2} \right) & \text{if } 53 < n < 59 \\ 4H \left(l_n + \frac{P - K}{2} \right) & \text{if } 58 < n < 64 \\ 4H \left(l_n + \frac{P - K}{2} \right) & \text{if } n = 64 \\ l_n \left[\left(\sum_{i=1}^n l_n - \frac{1}{2} l_n \right) 2 \tan \beta + \frac{K}{\cos \beta} + (P - K) + 2\gamma R \right] & \text{if } 64 < n < 108 \\ 2\pi R l_n & \text{if } 107 < n < 118 \end{cases}$$

Объем n -ой ячейки:

$$V(n) = \begin{cases} l_n \left[\left(\sum_{i=1}^n l_n - \frac{1}{2} l_n \right) K \tan \beta - \frac{PR \cos \gamma}{2} + \gamma R^2 \right] & \text{if } 0 < n < 44 \\ \pi R^2 l_n & \text{if } 43 < n < 54 \\ (P - K) l_n H & \text{if } 53 < n < 59 \\ (P - K) l_n H & \text{if } 58 < n < 64 \\ (P - K) l_n H & \text{if } n = 64 \\ l_n \left[\left(\sum_{i=1}^n l_n - \frac{1}{2} l_n \right) K \tan \beta - \frac{PR \cos \gamma}{2} + \gamma R^2 \right] & \text{if } 64 < n < 108 \\ \pi R^2 l_n & \text{if } 107 < n < 118 \end{cases}$$

Площадь поперечного сечения n -ой ячейки:

$$S_{non}(n) = \begin{cases} \left[\left(\sum_{i=1}^n l_n - \frac{1}{2} l_n \right) K \tan \beta - \frac{PR \cos \gamma}{2} + \gamma R^2 \right] & \text{if } 0 < n < 44 \\ \pi R^2 & \text{if } 43 < n < 54 \\ (P - K)H & \text{if } 53 < n < 59 \\ (P - K)H & \text{if } 58 < n < 64 \\ (P - K)H & \text{if } n = 64 \\ \left[\left(\sum_{i=1}^n l_n - \frac{1}{2} l_n \right) K \tan \beta - \frac{PR \cos \gamma}{2} + \gamma R^2 \right] & \text{if } 64 < n < 108 \\ \pi R^2 & \text{if } 107 < n < 118 \end{cases}$$

Элементами эквивалентной электрической схемы являются ёмкости и сопротивления. Ёмкость (теплоёмкость или ёмкость конденсатора) n -ой ячейки равна:

$$C(n) = c\rho V(n),$$

где c - удельная теплоёмкость стали, ρ - плотность стали.

Подсчитаем сопротивление теплопередачи для каждой ячейки. Так как в центр каждой ячейки помещается узел, то число резисторов будет в два раза больше, чем число ячеек и каждой ячейке будет соответствовать пара сопротивлений. Следовательно, половина сопротивления n -ой ячейки:

$$R(n) = \begin{cases} \frac{l_n}{2\lambda S_{non}} & \text{if } 0 < n < 54 \\ \frac{l_n}{2\lambda S_{non}} & \text{if } 53 < n < 65 \\ \frac{H}{2\lambda S_{non}} & \text{if } 64 < n < 118 \end{cases},$$

где λ - теплопроводность стали.

Сопротивление теплообмену с внешней средой n -ой ячейки:

$$R_{T(n)} = \frac{1}{\alpha S_{нов}(n)},$$

где α - коэффициент теплообмена между весами и окружающей средой.

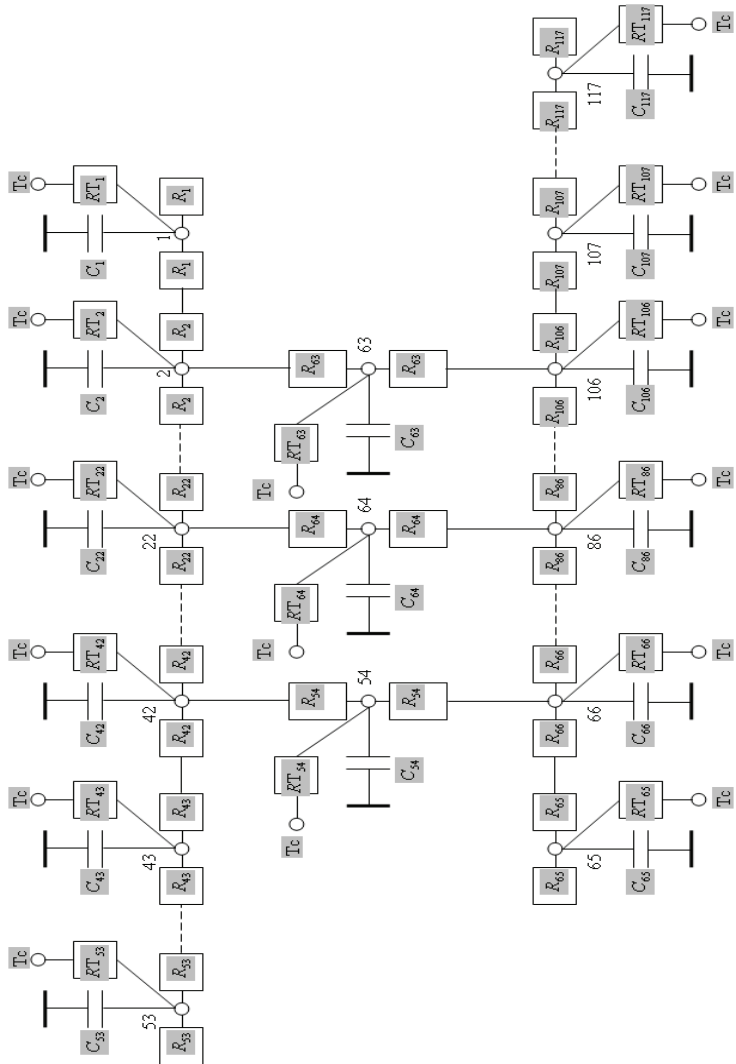


Рис. 2. Эквивалентная электрическая схема

На рис. 2. приведены основные ячейки эквивалентной электрической схемы. Так как в схеме 117 конденсаторов, 351 резистор и 117 узлов привести её целиком не представляется возможным.

Приведенная схема является электротепловой моделью тензовесов. Распределение напряжения в схеме соответствует распределению температуры по конструкции тензовесов.

Для моделирования распространения тепла по тензовесам необходимо задать для электротепловой модели корректные начальные и граничные условия: можно задавать необходимое начальное распределение напряжения по схеме (т.е. температуры по весам); можно задавать необходимую температуру окружающей среды (как постоянную, так и переменную по времени), т.е. менять значение напряжения T_c .

Для моделирования прогрета тензовесов при наличии потока тепла от тензорезисторов, установленных на чувствительном элементе необходимо направить дополнительный ток в 64-ю ячейку схемы. Величина тока должна быть равна мощности источника тепла. При необходимости, например при моделировании прогрета тензовесов с дополнительными потоками тепла от измерительных приборов и т. п., можно подводить ток подобным образом к любой ячейке электротепловой схемы.

Для каждой ячейки записывается дифференциальное уравнение первого порядка, как это делалось выше в третьей главе. В итоге получается система, состоящая из 117 дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначив за $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{116}$ - температуры соответственно первой, второй и 117-й ячейки, а за $\dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_{116}$ - первые производные температур указанных ячеек, приведем частично эту систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0 &= -\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{(R_0 + R_1)C_0} + \frac{T_c - \varphi_0}{R_{T0}C_0} \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{(R_0 + R_1)C_1} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{(R_1 + R_2)C_1} - \frac{\varphi_1 - \varphi_{62}}{C_1 R_{62}} + \frac{T_c - \varphi_1}{R_{T1}C_1} \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{(R_1 + R_2)C_{21}} - \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{(R_2 + R_3)C_2} + \frac{T_c - \varphi_2}{R_{T2}C_2} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{21} &= \frac{\varphi_{20} - \varphi_{21}}{(R_{20} + R_{21})C_{21}} - \frac{\varphi_{21} - \varphi_{22}}{(R_{21} + R_{22})C_{21}} - \frac{\varphi_{21} - \varphi_{63}}{C_{21}R_{63}} + \frac{Tc - \varphi_{21}}{R_{T21}C_{21}} \\
\dot{\varphi}_{41} &= \frac{\varphi_{40} - \varphi_{41}}{(R_{40} + R_{41})C_{41}} - \frac{\varphi_{41} - \varphi_{42}}{(R_{41} + R_{42})C_{41}} - \frac{\varphi_{41} - \varphi_{53}}{C_{41}R_{53}} + \frac{Tc - \varphi_{41}}{R_{T41}C_{41}} \\
\dot{\varphi}_{52} &= \frac{\varphi_{51} - \varphi_{52}}{(R_{51} + R_{52})C_{52}} + \frac{Tc - \varphi_{52}}{R_{T52}C_{52}} \\
\dot{\varphi}_{53} &= \frac{\varphi_{41} - \varphi_{53}}{R_{53}C_{53}} + \frac{\varphi_{65} - \varphi_{53}}{R_{53}C_{53}} + \frac{Tc - \varphi_{53}}{R_{T53}C_{53}} \\
\dot{\varphi}_{62} &= \frac{\varphi_1 - \varphi_{62}}{R_{62}C_{62}} + \frac{\varphi_{105} - \varphi_{62}}{R_{62}C_{62}} + \frac{Tc - \varphi_{62}}{R_{T62}C_{62}} \\
\dot{\varphi}_{63} &= \frac{\varphi_{21} - \varphi_{63}}{R_{63}C_{63}} + \frac{\varphi_{85} - \varphi_{63}}{R_{63}C_{63}} + \frac{Tc - \varphi_{63}}{R_{T63}C_{63}} \\
\dot{\varphi}_{64} &= -\frac{\varphi_{64} - \varphi_{65}}{(R_{65} + R_{64})C_{64}} + \frac{Tc - \varphi_{64}}{R_{T64}C_{64}} \\
\dot{\varphi}_{73} &= \frac{\varphi_{72} - \varphi_{73}}{(R_{72} + R_{73})C_{73}} - \frac{\varphi_{73} - \varphi_{74}}{(R_{73} + R_{74})C_{73}} - \frac{\varphi_{73} - \varphi_{57}}{C_{73}R_{57}} + \frac{Tc - \varphi_{73}}{R_{T73}C_{73}} \\
\dot{\varphi}_{85} &= \frac{\varphi_{84} - \varphi_{85}}{(R_{84} + R_{85})C_{85}} - \frac{\varphi_{85} - \varphi_{86}}{(R_{85} + R_{86})C_{85}} - \frac{\varphi_{85} - \varphi_{63}}{C_{85}R_{63}} + \frac{Tc - \varphi_{85}}{R_{T85}C_{85}} \\
\dot{\varphi}_{105} &= \frac{\varphi_{104} - \varphi_{105}}{(R_{104} + R_{105})C_{105}} - \frac{\varphi_{105} - \varphi_{106}}{(R_{105} + R_{106})C_{105}} - \frac{\varphi_{105} - \varphi_{62}}{C_{105}R_{62}} + \frac{Tc - \varphi_{105}}{R_{T105}C_{105}} \\
\dot{\varphi}_{116} &= \frac{\varphi_{115} - \varphi_{116}}{(R_{116} + R_{115})C_{116}} + \frac{Tc - \varphi_{116}}{R_{T116}C_{116}}
\end{aligned}$$

Т.к. аналитическое решение данной системы дифференциальных уравнений является довольно громоздким, целесообразно решать её численно в программном комплексе МATHCAD.

На этом описание электротепловая модель тензовесов завершено. Далее, используя электротепловую модель, задавая различные граничные и начальные условия, разный шаг решения системы

уравнений, разные параметры материалов, потоков тепла и т.д., следует переходить к рассмотрению тепловой динамики тензовесов.

В результате использования данных модели можно сделать следующие выводы относительно характеристик прогрева исследуемых тензовесов от окружающей среды:

1. Максимум погрешности достигается на 180 секунде и составляет 0,006% измеряемой величины при перепаде температуры между весами и окружающей средой в 1К и при максимальной измеряемой нагрузке для исследуемых весов в 90 кгс.

2. Стойки тензовесов прогреваются окружающей средой быстрее, чем вся остальная конструкция. Это происходит из-за того, что у стоек отношение площади поверхности к объему стоек больше, чем у всех остальных элементов весов. Причем, быстрее прогреваются стойки, ближайшие к центру (т.е. ячейки №58 и №59 самые горячие, №54 и №63 - самые холодные и т.д.). Этот эффект можно объяснить тем, что наиболее близкие к центру весов стойки соприкасаются в среднем с более теплыми ячейками, чем более отдаленные от центра стойки. То есть средняя температура 34-й и 74-й ячеек больше, чем средняя температура 42-й и 66-й ячеек.

3. Чувствительный элемент прогревается заметно позже из-за того, что он "толще", чем стойки.

Внедрение системы, позволяющей уменьшить температурную динамическую погрешность основного измерительного прибора в АДТ – тензометрических весов – включает в себя поведение следующих изменений производственных процессов по проведению аэродинамического эксперимента:

1. Одновременно с изготовлением тензометрических весов необходимо создать программный продукт – тепловую модель тензометрических весов. Настоящий продукт может быть создан как на одном из многочисленных языков программирования, так и в программных комплексах, таких как MATHCAD, MATHEMATICA, MATLAB. По готовым чертежам тензометрических весов и по методике, описанной в ([7]-[10]), подобный программный продукт может быть создан в течение нескольких дней. Настоящий продукт должен являться обязательным приложением к тензометрическим весам.

2. На этапе методологической подготовки аэродинамического эксперимента, на основании Технического задания, методики эксперимента и программы испытаний производится расчет теплово-

го режима, в котором будут находиться исследуемая модель и тензометрические весы во время экспериментальных исследований. Далее пиковые фрагменты режима испытаний (времена наибольших и наименьших температур потока, времена минимальной измеряемой нагрузки) должны быть исследованы с помощью тепловой модели тензовесов, в которой задаются температуры потока, державки и исследуемого изделия. Если полученные параметры температурной динамической погрешности не укладываются в параметры, предписанные техническим заданием, то с помощью описанного программного продукта производится расчет характеристик технических средств (теплозащитный кожух для уменьшения негативного влияния потока тепловой энергии от окружающей среды, теплозащитная прокладка из нержавеющей стали, позволяющая уменьшить тепловой поток от исследуемого аппарата), которые необходимо установить на тензометрические весы для уменьшения температурной динамической погрешности до предписанного техническим заданием уровня.

3. В случае, если указанными техническими методами (установка кожуха, прокладки) не удастся привести ожидаемую в аэродинамическом эксперименте температурную динамическую погрешность в рамки, определенными техническим заданием, необходимо с помощью тепловой модели тензометрических весов произвести на ЭВМ расчет параметров температурной динамической погрешности с учетом установки защитных средств. В дальнейшем, при обработке полученных данных необходимо будет внести поправки результаты эксперимента на рассчитанные значения температурной динамической погрешности. Стоит отметить, что подобные действия корректны, так как описанная выше тепловая модель способно определять не только величину модуля ошибки, но и знак.

4. Перед проведением испытаний во время установки исследуемого аппарата необходимо провести измерение температур тензовесов, державки и установленного исследуемого аппарата. Далее с помощью полученных значений и тепловой модель тензовесов следует произвести расчет параметров ожидаемой температурной динамической погрешности, обусловленной потоком тепловой энергии по направлению исследуемая модель – тензовесы – державка. Как было показано выше, подобная погрешность при перепадах температур в несколько градусов Цельсия может в разы превосходить другие типы температурной динамической погрешности. В

случае значений погрешности, превышающих допустимые техническим заданием, необходимо произвести расчет эффективности установки теплоизолирующей прокладки из нержавеющей стали. Если установка прокладки не приводит к удовлетворительным параметрам ожидаемой температурной динамической погрешности, необходимо, как и в п.3, на этапе внесения поправок в результаты экспериментального исследования откорректировать полученные данные измерений на величины, полученные с помощью тепловой модели тензометрических весов.

5. На этапе технической подготовки аэродинамического эксперимента при монтаже, наладке и тарировке измерительно-вычислительной системы определяется электрическое напряжение, под которым будут находиться тензодатчики в тензовесах. С точки зрения уменьшения температурной динамической погрешности желательно уменьшение указанного напряжения, однако, для хорошей работы измерительных приборов и приемлемой чувствительности тензодатчиков напряжение необходимо повышать. Поэтому на основании указанных в Методике проведения эксперимента диапазонах изменения измеряемых величин необходимо адекватно выбрать подаваемое на тензодатчики напряжение. Далее на модели тензометрических весов необходимо произвести расчет величины возникающей температурной динамической погрешности из-за выделяющейся на тензодатчиках тепловой энергии. На полученное значение величины температурной динамической погрешности необходимо скорректировать итоговые результаты измерений.

Расчеты показывают, что расходы по внедрению предлагаемой системы окупятся приблизительно за три с половиной недели работы аэродинамической трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бешелев С.Д.* Интенсификация научных исследований – М.: Машиностроение, 1983.

2. *Бешелев С.Д.* Производительность и информационная мощность экспериментальных установок. Труды МАИ, 1979, №210.

3. *Богданов В.В., Волобуев В.С.* Разработка комплекса шестикомпонентных тензометрических весов повышенной точности для исследования аэродинамических характеристик моделей современных самолетов при малых, средних и максимальных нагрузках // Отчет НИО-7 ЦАГИ – 1999. - №4304.

4. *Богданов В.В.* Основные виды измерений при исследованиях аэродинамики и прочности летательных аппаратов // Доклад на семинаре по измерительной технике для экспериментальных исследований летательных аппаратов. г. Жуковский, ЦАГИ, 26.09.2002.

5. *Богданов В.В., Волобуев В.С.* Многокомпонентные тензометрические весы // Датчики и системы. – 2004. - №3.

6. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. «Физико-математическая литература», 2000.

7. *Клеев И.В.* Температурные динамические погрешности в тензометрических аэродинамических шестикомпонентных весах // Датчики и системы. – 2007. - №2.

8. *Клеев И.В.* Организационно – экономический механизм проведения трубного аэродинамического эксперимента при разработке новых образцов боевой авиационной техники (БАТ) // «Авиакосмическая техника и технология», М.: 2008 - №1.

9. *Клеев И.В.* Тепловая модель тензометрических весов // Ученые записки ЦАГИ – Жуковский - 2008 - №3.

10. *Клеев И.В.* Техничко-экономические и производственно-технологические особенности проведения трубного аэродинамического эксперимента при создании новых образцов летательной техники // «Авиакосмическая техника и технология», М.: 2008 - №1.

11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Седьмое издание. М.: «Наука», 2004.

12. *Уровев В.М.* Уравнения математической физики. ИФ «Яуза», Москва, 1998.

Л. П. Клеева,
д.э.н., зав сектором ИПРАН РАН,
И. В. Клеев,
ассистент преподавателя МАИ

Анализ цикличности научного потенциала России в 1995–2007 годах

О. А. Кошкарева

На наличие спадов и подъемов деловой активности ученые экономисты обратили свое внимание еще в начале XIX века. Тогда в работах Ж. Сисмонди, К. Родбертуса-Ягецова и Т. Мальтуса [1] появились исследования кризисных и циклических явлений в экономике. В настоящее время существует несколько подходов к объяснению цикличности экономического развития и моделей экономических циклов. Некоторые из них связывают экономическое развитие с развитием науки и инновациями.

Одним из тех, кто исследовал влияние инноваций на экономику был известный австрийский экономист Дж. Шумпетер. По его мнению, постепенное внедрение инноваций обеспечивает поступательное развитие экономики, однако вследствие неравномерно развивающейся науки, а также естественного сопротивления встречаемого при внедрении инноваций этот процесс скорее представляет собой череду импульсов, что в свою очередь выводит экономическую систему из равновесия. Другой экономист К. Жугляр связал инновационную активность со среднесрочными экономическими циклами (7-11 лет).

Наибольший вклад в изучение длительных циклов (45-60 лет) внес российский экономист Н.Д. Кондратьев. Он связал крупные научные открытия с развитием экономики. Завершение одного и начало другого цикла Кондратьева связывают со сменой технологического уклада. Период оживления и подъема кондратьевского цикла обусловлены появлением все новых и новых технологий, в основе которых лежат революционные научные открытия, а также высокой добавленной стоимостью товаров и услуг, производимых с использованием этих технологий. Со временем появление технологий на основе последнего технологического уклада значительно сокращается, а насыщаемость рынка ведет к значительному сокращению добавленной стоимости продукции. На смену подъема приходит спад и последующая депрессия, на смену заканчивающемуся кондратьевскому циклу приходит новый. Так изобретение двигателя внутреннего сгорания по-

служил толчком к развитию первого цикла Кондратьева, следующий цикл был связан с освоением железных дорог, третий – с масштабным освоением электричества. Для текущего цикла характерно активное использование микроэлектроники и геной инженерии.

Поскольку цикличность развития характерна для большинства сфер экономики, интерес должно также представлять исследование циклов научной активности и циклов научных открытий. В связи с этим в данной работе анализируется динамика основы научной активности – научного потенциала (НП), как необходимого условия развития науки. Основой для выполнения данной работы послужили материалы, изложенные в публикации Л.Э. Миндели и Э.Т. оглы Мусаева «Анализ цикличности в развитии научного потенциала» опубликованной в 1991 году [2].

Приведенная работа посвящена исследованию цикличности НП на основе статистических показателей характеризующих состояние науки с 1952 по 1990 года в СССР. Эти показатели исследовали на наличие волнообразной динамики, а также была проведена попытка найти с помощью средств факторного анализа некий составной индикатор призванных характеризовать состояние науки. В результате проведенного ими исследования была обнаружена цикличность в двух из четырех показателей: в данных о численности персонала занятого в науке и данных об основных фондах. Был также найден индикатор НП, в котором подтвердилось наличие волн с периодом около 30 лет. Ими была принята гипотеза о цикличности развития научного потенциала.

Авторы указанной выше работы проводили исследования статистических данных характеризующих ресурсное обеспечение всего СССР. При подборе данных для проведения анализа выяснилось, что аналогичной статистики по РСФСР для сопоставимости данных найти не представляется возможным. А с 1995 года Госкомстат России стал использовать другие классификаторы. Таким образом, удовлетворительные для анализа данные, характеризующие научный потенциал (НП) России довольно ограничены и представлены 13 точкам с 1995 по 2007 годы. В связи с этим результаты, полученные в проведенном исследовании, следует считать предварительными.

1. ПОДГОТОВКА ДАННЫХ

Для анализа были взяты показатели схожие с теми, что использовались в работе [2]. В ней исследовались:

- общие расходы на науку из государственного бюджета и других источников,
- численность занятых и основные фонды отрасли «Наука и научное обслуживание»,
- средняя заработная плата занятых в науке.

В настоящем исследовании были проанализированы следующие показатели:

- внутренние затраты на исследования и разработки,
- численность персонала, занятого исследованиями и разработками,
- основные средства исследований и разработок,
- внутренние затраты на оплату труда.

Все показатели, измеряющиеся в денежных эквивалентах, были переведены в цены 1995 года (см. табл. 1).

Таблица 1. Исходные данные в ценах 1995 года.

Года	Внутренние затраты на исследования и разработки в ценах 1995 года (млн руб)	Весь персонал, занятый исследованиями и разработками	Основные средства исследований и разработок в постоянных ценах 1995 г (млн руб)	Внутренние затраты на оплату труда в ценах 1995 г (млн руб)
1995	12 149,50	1 061 044,00	85 087,60	4 605,80
1996	13 301,71	990 743,00	121 920,90	5 192,59
1997	14 491,29	934 637,00	107 594,30	5 757,65
1998	12 602,17	855 190,00	88 222,60	4 955,43
1999	13 995,43	872 363,00	62 612,10	4 871,23
2000	16 234,94	887 729,00	46 327,80	5 876,70
2001	19 125,44	885 568,00	38 062,80	7 232,03
2002	21 201,12	870 878,00	35 410,60	8 269,89
2003	23 399,28	858 470,00	44 451,80	8 973,69
2004	22 485,77	839 338,00	40 277,60	8 916,73
2005	22 207,33	813 207,00	38 811,30	9 071,57
2006	23 998,50	807 066,00	46 646,00	9 917,88
2007	27 167,66	801 135,00	46 025,60	11 532,00

В ходе проведения анализа было сделано стандартное предположение о том, что каждый из этих показателей может быть представлен в виде:

$$x = x_t + \varepsilon, \quad \text{где}$$

x_t – общий тренд временного ряда, а ε – сумма циклической и случайной составляющей.

Тренд был построен методом наименьших квадратов (см. табл. 2).

Таблица 2. Остатки после вычета тренда в абсолютных величинах

Года	Внутренние затраты на исследования и разработки в ценах 1995 года (млн руб)	Весь персонал, занятый исследованиями и разработками	Основные средства исследований и разработок в постоянных ценах 1995 г (млн руб)	Внутренние затраты на оплату труда в ценах 1995 г (млн руб)
1995	1 019,00	77 430,46	-12 066,37	611,86
1996	919,11	23 919,31	30 684,25	644,14
1997	856,59	-15 396,85	22 274,96	654,68
1998	-2 284,62	-78 054,00	8 820,58	-702,04
1999	-2 143,47	-44 091,15	-10 872,61	-1 340,76
2000	-1 156,05	-11 935,31	-21 239,59	-889,80
2001	482,36	2 693,54	-23 587,28	-88,99
2002	1 305,94	4 793,38	-20 322,16	394,36
2003	2 252,00	9 175,23	-5 363,65	543,65
2004	86,39	6 833,08	-3 620,53	-67,82
2005	-1 444,15	-2 508,08	830,48	-467,49
2006	-905,07	8 140,77	14 582,50	-175,70
2007	1 011,98	18 999,62	19 879,41	883,91

Были построены графики иллюстрирующие динамику каждого из показателей во времени, а также динамику остатков после вычета тренда (см. рис. 1).

На рисунке 2 представлены графики исследуемых показателей НП после вычета тренда.

Очевидно, что функции графиков представленных на рис. 2 не являются монотонными на исследуемом промежутке времени. Также ничто не указывает на наличие асимптот. На всех графиках присутствуют локальные минимумы и максимумы. На графиках (а) и (б) минимумы и максимумы совпадают, минимумы приходятся на 1998 и 2005 года (расстояние 7 лет), максимум приходится на 2003 год, это десятая точка от начала исследования. Т.о. расстояние между максимумами превышает расстояние между минимумами, следовательно, ярко выраженный цикл на исследуемом отрезке времени не обнаруживается.

На графике (в) имеется по одному максимуму и минимуму (при-

Рисунок 1. Динамика показателей и остаточные составляющие после вычета тренда

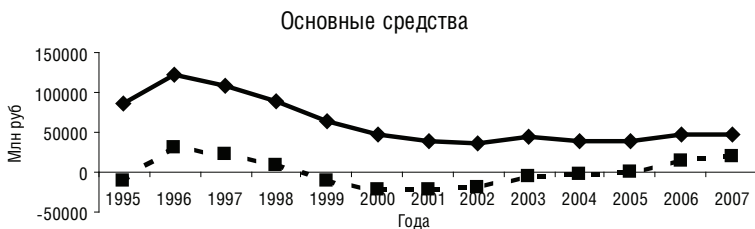
а)



б)



в)



г)



—◆— динамика показателя
 -■- остаточные составляющие после вычета тренда

Рисунок 2. Остатки после вычета тренда исследуемых показателей

а)



б)



в)



г)



ходятся на 1996 и 2001 года соответственно), таким образом выявить цикличность для этого показателя на исследуемом периоде времени не представляется возможным.

На графике (г) присутствует два минимума и два максимума расстояние, между которыми одинаково и составляет 6 лет. Минимумы приходятся на 1999 и 2005 года, максимумы – на 1997 и 2003. Таким образом, просматривается очевидная цикличность с периодом равным 6 годам.

Исследование графиков остаточных составляющих исследуемых показателей после вычета тренда, позволяет с большой долей уверенности говорить о наличии шестилетнего цикла внутренних затрат на оплату труда персоналу занятому в исследованиях и разработках, предполагать отсутствие циклов с периодом менее 11 лет для показателя «Основные средства исследований и разработок». По виду графиков (а), (б) и (в) сложно судить о том, представляют ли собой остатки шум или в них присутствует циклическая составляющая. Для более обоснованных выводов о цикличности был проведен спектральный анализ.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

При проведении спектрального анализа исследовались данные в целях подтверждения или опровержения гипотезы относительно наличия в них цикличности, а также установки основных параметров функций, которыми они могут быть описаны. При этом предполагается, что функция имеет вид:

$x_t = a_0 + \sum (a_k \cdot \cos(w_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(w_k \cdot t))$, для $k = 1$ до n , n не превышает $N/2$, где N – число наблюдений.

Результаты проведенного анализа, представлены в таблицах 3-6 и рисунках 3-7.

Таблица 3. Результаты спектрального анализа для переменной «Внутренние затраты на исследования и разработки»

	Частота	Период	Косинус коэфф.	Синус коэфф.	Периодограмма	Спектр. плотн.	Хемминг веса
0	0,000000		-168,664	0,000	170686	2976114	0,035714
1	0,083333	12,00000	11,825	-750,666	3381837	5982780	0,241071
2	0,166667	6,00000	670,178	1585,169	17771401	8964436	0,446429
3	0,250000	4,00000	205,456	288,868	753941	4933375	0,241071
4	0,333333	3,00000	-89,890	-347,858	774513	1252412	0,035714
5	0,416667	2,40000	51,040	-145,971	143476	658204	
6	0,500000	2,00000	509,439	0,000	1557168	819663	

В колонке «Частота» представлены частоты w_k , на который были исследованы данные, «Период» - соответствующий частоте период $T_k = 1/w_k$. Косинус-коэффициент (a_k) и синус-коэффициент (b_k) – соответствующие коэффициенты регрессии. Периодограмма вычислена по формуле:

$$P_k = (a_k^2 + b_k^2) * N/2$$

Значения периодограммы интерпретируют как дисперсию данных соответствующей частоты или периода. При этом если для некоторой частоты значение периодограммы значительно больше, чем для соседних, то можно ожидать периодичность функции с этой частотой.

Сглаживая периодограмму, можно определить основные частотные области (или спектральные плотности), которые вносят значительный вклад в циклическое поведение ряда. Для сглаживания периодограммы могут применяться различные окна, в данном случае применялись веса Хемминга. По виду графика спектральной плотности можно судить о наличии цикличности. Для поиска возможных периодов циклов для каждого показателя был построен график зависимости периодограммы от периода.

На графике периодограммы (рис. 3) ярко выражен пик в районе значения 6, причем, судя по кривой можно сказать, что период будет немного превышать шесть лет.

Для показателя «Персонал занятый исследованиями и разработками» график периодограммы представлен на рис. 4.

Судя по графику, при наличии цикличности, период ее несколько превышает 6 лет, что подтверждает результаты предварительного исследования остаточных составляющих после вычета тренда.

Рисунок 3. Зависимость значений периодограммы от периода для показателя «Внутренние затраты на исследование и разработки»

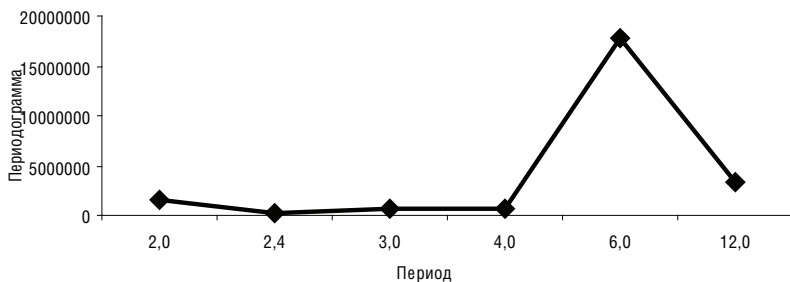


Рисунок 4. Зависимость значений периодограммы от периода для показателя «Персонал занятый исследованиями и разработками»

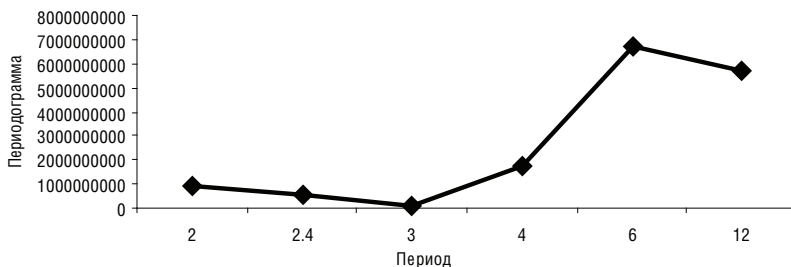


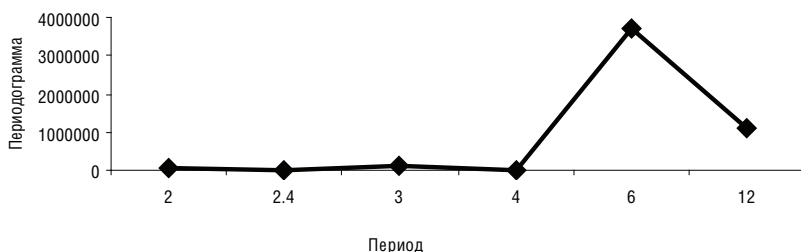
Таблица 4. Результаты спектрального анализа для переменной «Персонал занятый исследованиями и разработками»

	Частота	Период	Косинус коэфф.	Синус коэфф.	Периодограмма	Спектр. плотн.	Хемминг веса
0	0,000000		-3166,60	0,0	6,016423E+07	3,243936E+09	0,035714
1	0,083333	12,00000	19532,06	-23775,7	5,680711E+09	4,428990E+09	0,241071
2	0,166667	6,00000	31702,40	10520,0	6,694280E+09	4,780470E+09	0,446429
3	0,250000	4,00000	9620,99	13989,5	1,729615E+09	2,630837E+09	0,241071
4	0,333333	3,00000	3809,07	-1136,0	9,479698E+07	8,598931E+08	0,035714
5	0,416667	2,40000	8215,42	-4678,4	5,362802E+08	5,608692E+08	
6	0,500000	2,00000	12267,65	0,0	9,029720E+08	6,684474E+08	

Таблица 5. Результаты спектрального анализа для переменной «Затраты на оплату труда в сфере исследований и разработок»

	Частота	Период	Косинус коэфф.	Синус коэфф.	Периодограмма	Спектр. плотн.	Хемминг веса
0	0,000000		-147,318	0,000	130216	838861	0,035714
1	0,083333	12,00000	337,957	-254,415	1073654	1437573	0,241071
2	0,166667	6,00000	264,033	737,650	3683046	1915750	0,446429
3	0,250000	4,00000	-47,241	28,316	18201	960118	0,241071
4	0,333333	3,00000	11,911	-130,275	102681	191630	0,035714
5	0,416667	2,40000	59,709	-34,378	28482	59380	
6	0,500000	2,00000	118,304	0,000	83974	58555	

Рисунок 5. Зависимость значений периодограммы от периода для показателя «Затраты на оплату труда персоналу занятому исследованиями и разработками»



И снова период возможной цикличности снова немного превышает 6 лет.

Таблица 6. Результаты спектрального анализа для переменной «Основные фонды отрасли исследований и разработок»

	Частота	Период	Косинус коэфф.	Синус коэфф.	Периодограмма	Спектр. плотн.	Хемминг веса
0	0,000000		-3313,24	0,00	6,586517E+07	1,069599E+09	0,035714
1	0,083333	12,00000	17731,24	5638,97	2,077170E+09	1,152643E+09	0,241071
2	0,166667	6,00000	-7072,63	6346,90	5,418316E+08	7,844322E+08	0,446429
3	0,250000	4,00000	-4636,80	457,20	1,302536E+08	3,290087E+08	0,241071
4	0,333333	3,00000	-5956,78	-1433,89	2,252357E+08	2,391189E+08	0,035714
5	0,416667	2,40000	-7333,99	1038,78	3,291987E+08	2,747442E+08	
6	0,500000	2,00000	-6281,58	0,00	2,367496E+08	2,805008E+08	

На графике 6 локальных максимумов периодограммы нет, что говорит об отсутствии периодов цикличности этого показателя на исследуемом отрезке времени, что так же подтверждает предварительный анализ графика остатков после вычета тренда показателя «Основные фонды отрасли исследований и разработок». Определить период для показателя основных средств возможным не представляется. Очевидно, что в случае наличия циклов данного показателя, он не менее 12 лет.

Рисунок 6. Зависимость значений периодограммы от периода для показателя «Основные фонды отрасли исследований и разработок»

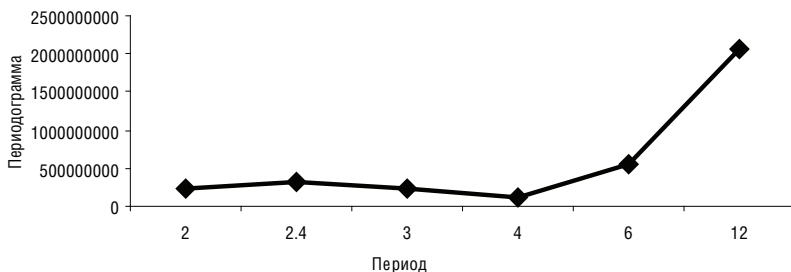
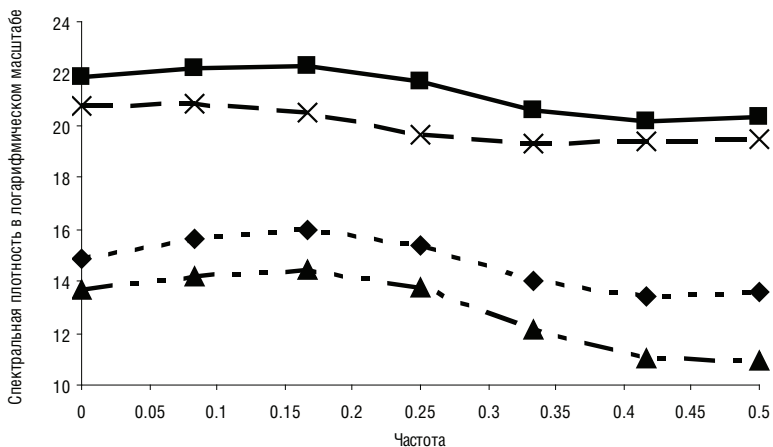


Рисунок 7. Зависимость спектральной плотности в логарифмическом масштабе от частоты для всех исследуемых показателей.



- ◆ - Внутренние затраты на исследования и разработки
- ■ - Внутренние затраты на исследования и разработки
- ▲ - Затраты на оплату труда
- × - Основные средства исследования и разработок

Таким образом, для трех показателей (величины внутренних затрат на развитие науки, численности персонала занятого в исследованиях и разработках и затраты на оплату труда в сфере исследований и разработок) видимый период составляет примерно 6 лет, именно этому периоду соответствуют пики периодограмм. Совпадение периодов может быть обусловлено внешними факторами, например, циклами в экономике, такими как краткосрочные циклы Китчена. Период таких циклов составляет от трех до пяти лет, и их наличие связывают с массовым обновлением товаров длительного пользования.

Вид графиков периодограмм ресурсов науки позволяет предположить, что в исследуемых данных существуют более длинные циклы, которые невозможно обнаружить в связи с недостаточной продолжительностью периода наблюдений. Следует отметить, что спектральный анализ позволяет находить периоды циклов, если в данных явно содержится более одного цикла. С уверенностью говорить о том, что все циклы данных найдены, тогда когда статистический ряд исследуемых данных содержит минимум 3 цикла и график отношения периодограммы к периоду с момента последнего пика апроксиматически стремится к 0.

Согласно теории спектрального анализа, если в спектре амплитуда составляющих (косинус-коэффициентов и синус-коэффициентов) быстро убывает с увеличением частоты, то исходная функция является плавной, без резких колебаний и изменений. Если же в спектре присутствуют высокочастотные составляющие с большой амплитудой, то исходная функция будет содержать резкие колебания. Так, для временного ряда это может указывать на большую случайную составляющую, неустойчивость описываемых им процессов, наличие шумов в данных [3].

Изначально Фурье предположил, что любой процесс можно представить в виде конечной суммы синусов и косинусов с различными частотами с соответствующими регрессионными множителями перед ними. И применил эту модель для описания теплопроводности. Затем анализ, названный его именем, нашел широкое применение во многих других областях. Было замечено что в частотах, для которых регрессионные коэффициенты резко отличаются от остальных имеется четкая цикличность. Во всех исследуемых в данной работе рядах значения косинус-коэффициентов и синус-коэффициентов сравнимы между собой и резко отличающихся среди них нет, что может свидетельствовать в пользу того, что колебания в них не являются циклическими.

ВЫВОДЫ

Очевидно, что формирования научного потенциала представляет собой сложный процесс сильно растянутый во времени и зависимый от множества условий. Проведенный анализ не исключает наличие циклов в исследуемых данных, а лишь не дает возможности обнаружить подобные свойства в связи с недостаточностью данных.

В то же время, даже при наличии необходимого набора данных, подобный анализ является техническим и не может быть использован для получения реального прогноза. У авторов работы [1], послужившей основой для проведения данного анализа, ключевой предпосылкой было сравнение НП с экономикой и предположение о том, что если наличие Кондратьевских циклов подтверждается для экономики, то подобные циклы можно обнаружить и в науке.

Кондратьев при изучении циклов экономики исследовал процессы накопления и обесценивания капитала, ресурс, который является хорошим индикатором состояния экономики, одновременно зависимый от состояния экономики и необходимый для ее развития. Однако ресурсы НП использованные для исследования цикличности науки не являются подобными индикаторами ее состояния. Финансовые показатели являются необходимым, но недостаточным ресурсом развития науки, кроме того, в науке они аккумулируются с гораздо большими временными лагами, чем в экономике и зачастую распределены непропорционально, как между теми кому ресурсы поступают, так и между теми от кого они поступают, относительно получения и использования научно-технических достижений. Что касается персонала занятого в исследованиях и разработках, то гораздо более важным является его качество, чем численность занятых. Так в 2007 году численность исследователей в России составляла 464357 человек и 69 на 10 000 занятых в экономике, для сравнения в Великобритании эти показатели составили 183535 и 58 соответственно. Однако вряд ли из этого следует, что НП Великобритании ниже, чем России.

Проведенный в работе анализ не опровергает наличия цикличности в исследуемых данных. А для таких показателей как внутренние затраты на исследования и разработки, персонал занятый исследованиями и разработками, внутренние затраты на оплату труда персоналу занятому исследованиями и разработками удалось обнаружить колебания похожие на цикличность с периодом 6 или чуть более лет. Тем не менее, большинство полученных данных говорят в пользу наличия цикличности с гораздо более длительным периодом чем исследуемый временной отрезок. Это согласуется с работой [2], где период найденного цикла приблизительно равнялся 30 годам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экономическая теория: учебное пособие / под ред. Грязновой А.Г. и Соколинского В.М., 2005
2. Миндели Л.Э., оглы Мусаев Э.Т. «Анализ цикличности в развитии научного потенциала», 1991
3. Дженкинс Г., Ваттс Д. «Спектральный анализ и его приложения», 1971
4. Научный потенциал России за 1995–2005 годы, Центр исследований проблем развития науки РАН, 2007
5. Наука, технологии и инновации: 2008, М.: ИПРАН РАН, 2008
6. Российский статистический ежегодник, 2008

О. А. Кошкарева,
научный сотрудник ИПРАН РАН

**Подготовка оригинал-макета и издание осуществлено
Институтом проблем развития науки РАН**

Подписано в печать 28.05.2009. Формат 60 x 88 1/16. Печать офсетная.
Объем 5,5 п.л. Тираж 300 экз.

Институт проблем развития науки РАН. 117485, Москва, ул. Обручева, д. 30А.
Тел.: (495) 938-50-45 Факс: (495) 938-65-10
E-mail: post@issras.ru www.issras.ru

